Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Журавлев, П. Самовол, Работа над ошибками, *Квант*, 2020, номер 5, 46–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20200506>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 17:18:07

Работа над ошибками

В.ЖУРАВЛЕВ, П.САМОВОЛ

Если вы не делаете ошибок, вы решаете слишком простые задачи, и это большая ошибка.

Фрэнк Вильче

Введение

Эта история началась с того, что дочь одного из авторов этой статьи принесла пример вступительной работы на кружки Малого мехмата за 7 класс. На листке с условиями задач выделялась надпись: **«Во всех задачах требуется полное решение!»** Одна из задач привлекла наше внимание. Вот она.

Задача 1. Квадрат $ABCD$ разрезали на треугольники и внутри каждого из них написали его периметр (рис.1). Найдите сторону квадрата $ABCD$.

Рис. 1

Казалось бы, что в ней такого? Сначала нужно найти периметр четырехугольника $FGHE$. Для этого сложим периметры трех треугольников FGQ , QHK и KEF , находящихся внутри этого четырехугольника, и вычтем периметр треугольника FQK . Поступая аналогично, найдем периметр квадрата $ABCD$. Для этого сложим периметры треугольников AFE , DEH , CHG и BGF и вычтем периметр четырехугольника $FGHE$.

Итак,

$$P_{FGHE} = P_{FGQ} + P_{HOK} + P_{KEF} - P_{FQK} = 6 + 5 + 7 - 8 = 10,$$

$$P_{ABCD} = P_{AFE} + P_{DEH} + P_{CHG} + P_{BGF} - P_{FGHE} = 12 + 10 + 7 + 6 - 10 = 25.$$

Поскольку у квадрата все стороны равны, легко находим ответ: длина стороны квадрата равна $25/4 = 6,25$.

Видимо, такого решения и ожидают от семиклассника.

Однако все не так просто. Как говорится, дьявол скрывается в деталях. В геометрической задаче нельзя произвольно назначать параметры. Нельзя взять и расставить понравившиеся нам числа по треугольникам. Но если мы это все-таки сделали, следовало бы задуматься: *существует ли такой квадрат?*

Напомним фольклорную задачу, ставшую уже классической.

Задача 2. Найдите площадь прямоугольного треугольника с гипотенузой 10 см и высотой, проведенной к гипотенузе, равной 6 см.

С одной стороны, площадь треугольника равна половине произведения гипотенузы на высоту, проведенную к ней, откуда получаем ответ: $S_{\Delta} = \frac{10 \cdot 6}{2} = 30 \text{ (см}^2\text{)}$. С другой стороны, медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы. В условиях задачи 2 длина медианы равна 5 см. При этом медиана как наклонная не может быть короче высоты, равной 6 см. Получаем противоречие. Это означает, что прямоугольного треугольника, удовлетворяющего условиям задачи 2, *не существует!*

Однако вернемся к первоначальной задаче. Во время написания этой статьи мы предлагали задачу 1 как школьникам, так и коллегам с высшим образованием. В нашей нерепрезентативной выборке никто не заметил подвоха, как, впрочем, и автор, предложивший эту задачу.

Сейчас мы докажем, что такого квадрата не существует. Для этого нам потребуется следующий известный факт.

Теорема. В прямоугольном треугольнике длина гипотенузы больше длины катета.

Применим эту теорему для прямоугольных треугольников FBG и EDH . Имеем $GF > GB$, тогда $10 = P_{BGF} > BG + GF > 2BG$, следовательно, $BG < 5$ и $GC = BC - BG > 6,25 - 5 = 1,25$, т.е. $GC > 1,25$. Аналогично, $HE > HD$, тогда $6 = P_{EHD} > EH + HD > 2HD$, следовательно, $HD < 3$ и $CH = CD - HD > 6,25 - 3 = 3,25$, т.е. $CH > 3,25$.

Теперь применим теорему для прямоугольного треугольника CHG . Получаем

$$7 = P_{GCH} = GC + CH + GH > GC + 2CH > 1,25 + 2 \cdot 3,25 = 7,75.$$

Противоречие. Итак, такого квадрата не существует!

Блестящая идея со сложением и вычитанием периметров разбилась о свойства прямоугольных треугольников.

Обнаружение скрытой ошибки в условии задачи заставляет нас задуматься над несколькими вопросами.

Один из вопросов можно отнести к педагогике и методике обучения математике. *Засчитывать ли решение задачи школьнику, нашедшему ответ в задаче, условие которой сформулировано некорректно?*

Применительно к нашим задачам – засчитывать ли решение задачи школьнику, получившему в задаче 1 ответ 6,25 тем способом, который описан выше, или школьнику, нашедшему в задаче 2, что площадь прямоугольного треугольника равна 30 см^2 ?

Здесь могут быть разные мнения. Время, отведенное на выполнение вступительной работы, ограничено, и у школьника вряд ли есть возможность провести полное исследование. Поэтому мы бы засчитали ему такое решение. Естественно, что школьник, доказавший невозможность существования такого квадрата, выше любой похвалы. Такой школьник наверняка усвоил, что одним из важнейших действий, которому учат при решении задач, является проверка! В то же время, мы можем привести следующий логический аргумент, основанный на известном свойстве импликации. *Из ложного утверждения может следовать как истинное утверждение, так и ложное. Но из истинного утверждения ложное утверждение не следует.* Таким образом, к задаче с противоречивыми условиями подходит любой ответ (даже тот, который мы здесь не привели), и его нужно засчитать. Однако оставим обсуждение этого непростого

педагогического и методического вопроса за рамками этой статьи.

Второй вопрос связан с попыткой исправить ошибку в условии и, возможно, провести небольшое математическое исследование. *Можем ли мы спасти идею задачи, немного «пошевелив» ее условие?*

Прямоугольник

Что произойдет, если в условии задачи квадрат заменить на прямоугольник? Чтобы не загромождать чертеж, уберем из рассмотрения $\triangle FQK$. Переформулируем задачу.

Задача 3. *От прямоугольника $ABCD$ отрезали треугольники и внутри каждого из них написали его периметр (рис. 2). Найдите периметр прямоугольника $ABCD$ при условии, что периметр четырехугольника $FGHE$ равен 10.*

Рис. 2

Применяя те же рассуждения со сложением и вычитанием периметров треугольников, найдем, что периметр прямоугольника $ABCD$ равен 25. Но теперь мы хотим знать: существует ли такой прямоугольник?

При обсуждении задач 1 и 3 с друзьями возник вопрос о большом разбросе значений периметров четырехугольника $FGHE$ и квадрата $ABCD$. Такая конструкция казалась невозможной. Периметр четырехугольника $FGHE$, равный 10, подозрительно мал по сравнению с периметром квадрата (прямоугольника) $ABCD$. Дальнейшие выкладки подтверждают верность высказанной догадки.

Начнем наше исследование с определения. Назовем четырехугольник *вписанным* в прямоугольник (квадрат), если каждая из его вершин лежит на одной из сторон прямоугольника (квадрата). В нашей задаче четырехугольник $FGHE$ является вписанным в прямоугольник $ABCD$. Получим несколько несложных оценок, связывающих периметры прямоугольника (квадрата) и вписанного в него четырехугольника.

Задача 4. *Для периметров прямоугольника $ABCD$ и вписанного в него четырехугольника $FGHE$ выполняются неравенства*

$$P_{FGHE} < P_{ABCD} < 2P_{FGHE}.$$

Докажите это.

Левая часть неравенства следует из неравенств треугольника (рис.3): действительно, $FE < AF + AE$, $FG < BF + BG$, $GH < CG + CH$ и $HE < DH + DE$. Сложим

Рис. 3

все эти неравенства и получим требуемое.

Докажем правую часть неравенства. Поскольку наклонные меньше перпендикуляра, то $AB \leq GE$ и $BC \leq FG$. Опять используем неравенства треугольника: $GE < FG + FE$ и $GE < GH + HE$; аналогично, $FH < FG + GH$ и $FH < FE + HE$. Следовательно,

$$P_{ABCD} = 2AB + 2BC \leq 2GE + 2FH < 2P_{FGHE},$$

что и требовалось доказать.

В условии задачи 3 периметр прямоугольника равен 25, а периметр вписанного четырехугольника равен 10, что невозможно, поскольку $25 > 2 \cdot 10 = 20$.

Доказанное нами неравенство достаточно слабое, хотя оно помогло доказать, что такого прямоугольника не существует.

Неравенство, связывающее периметры прямоугольника и вписанного четырехугольника, можно усилить. Для этого используем известные неравенства о средних. Итак, среднее квадратическое двух чисел не меньше их среднего арифметического:

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Теперь сформулируем усиление неравенства из задачи 3.

Задача 5. Для периметров прямоугольника $ABCD$ и вписанного в него четырехугольника $FGHE$ выполняется неравенство $P_{ABCD} \leq \sqrt{2}P_{FGHE}$. Докажите это.

Используем неравенство о средних в несколько измененном виде:

$$x + y \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Применим теорему Пифагора. Имеем

$$\begin{cases} AF + AE \leq \sqrt{2}\sqrt{AF^2 + AE^2} = \sqrt{2}FE, \\ BF + BG \leq \sqrt{2}\sqrt{BF^2 + BG^2} = \sqrt{2}FG, \\ CG + CH \leq \sqrt{2}\sqrt{CG^2 + CH^2} = \sqrt{2}HG, \\ DE + DH \leq \sqrt{2}\sqrt{DE^2 + DH^2} = \sqrt{2}HE. \end{cases}$$

Сложим все неравенства и получим требуемое. Задача решена.

Из неравенств, доказанных в задаче 4, следует, что если периметр прямоугольника равен 25, то периметр вписанного четырехугольника должен быть больше 12,5. В задаче 5 доказано более сильное неравенство, из которого следует, что периметр вписанного четырехугольника не меньше $\frac{25}{\sqrt{2}} > 17,67$.

Итак, знание несложных геометрических фактов помогло бы избежать ошибки при составлении задачи 1.

Квадрат

Вернемся к квадрату. Для упрощения рассуждений уберем на рисунке 1 из рассмотренных точки Q и K и треугольники FGQ , QHK , KEF и FQK . Получим «упрощенную» конструкцию (рис.4).

Рис. 4

В этом разделе статьи простота геометрических решений уступит место надежному и «скучному» аппарату алгебры. Чтобы развить успех, попробуем поработать не с конкретными значениями периметров, а будем рассматривать значения периметров как переменные. Используя теорему Пифагора и проводя технические выкладки, мы сможем составить и решить систему уравнений. Часть громоздких выкладок опускаем.

Проведем вычисления для квадрата, а пылливый читатель может адаптировать их для прямоугольника. Пусть длина стороны квадрата равна a . Введем обозначения для периметров треугольников: $P_{AFE} = P_1$, $P_{BFG} = P_2$, $P_{CHG} = P_3$ и $P_{DHE} = P_4$. Из условия задачи нам известен периметр четырехугольника $FGHE$; с другой стороны, с учетом наших обозначений он равен

$$P_{FGHE} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 - 4a.$$

Целью наших дальнейших рассуждений является получение соотношения, связывающего переменные a , P_1 , P_2 , P_3 и P_4 .

Неравенство из задачи 5 нам дает

$$4a \leq \sqrt{2}(P_1 + P_2 + P_3 + P_4 - 4a).$$

Отсюда получаем следующее неравенство, ограничивающее выбор параметров:

$$a \leq \frac{2 - \sqrt{2}}{4}(P_1 + P_2 + P_3 + P_4).$$

Обозначим длины отрезков, как на рисунке 4. Применим теорему Пифагора для $\triangle AFE$:

$$(P_1 - x - y)^2 = x^2 + y^2.$$

Тогда

$$y = \frac{P_1^2 - 2P_1x}{2P_1 - 2x} = P_1 - \frac{P_1^2}{2P_1 - 2x}.$$

Аналогично применим теорему Пифагора для $\triangle BFG$, $\triangle CHG$ и $\triangle DEH$. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} y = P_1 - \frac{P_1^2}{2P_1 - 2x}, \\ a - y = P_2 - \frac{P_2^2}{2P_2 - 2(a - z)}, \\ t = P_3 - \frac{P_3^2}{2P_3 - 2z}, \\ a - t = P_4 - \frac{P_4^2}{2P_4 - 2(a - x)}. \end{cases}$$

Последовательно избавимся от переменных. Для этого сложим первое уравнение со вторым, а третье с четвертым и выразим из них переменную z . Получим

$$\begin{cases} a = P_1 - \frac{P_1^2}{2P_1 - 2x} + P_2 - \frac{P_2^2}{2P_2 - 2(a - z)}, \\ a = P_3 - \frac{P_3^2}{2P_3 - 2z} + P_4 - \frac{P_4^2}{2P_4 - 2(a - x)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - z - P_2 = \frac{P_2^2(P_1 - x)}{2(a - P_1 - P_2)(P_1 - x) + P_1^2}, \\ z - P_3 = \frac{P_3^2(P_4 - (a - x))}{2(a - P_3 - P_4)(P_4 - (a - x)) + P_4^2}. \end{cases}$$

Сложив полученные уравнения, избавляем-

ся от переменной z :

$$a - P_2 - P_3 = \frac{P_2^2(P_1 - x)}{2(a - P_1 - P_2)(P_1 - x) + P_1^2} + \frac{P_3^2(P_4 - (a - x))}{2(a - P_3 - P_4)(P_4 - (a - x)) + P_4^2}.$$

Домножим обе части уравнения на выражения, стоящие в знаменателях, перенесем слагаемые в одну сторону уравнения и приведем подобные члены по степеням x , считая a , P_1 , P_2 , P_3 , P_4 параметрами. Мы получим квадратное уравнение относительно переменной x .

Здесь мы не приводим это квадратное уравнение ввиду его громоздкости, хотя читатели могут его получить, исписав несколько листов бумаги или, как авторы, проведя выкладки в онлайн-калькуляторе.

Если это квадратное уравнение имеет положительный корень, то это означает, что мы можем построить квадрат с заданными параметрами a , P_1 , P_2 , P_3 , P_4 . При этом, поскольку мы знаем x , мы знаем и расположение точки E (и точек F , G , H) на стороне квадрата.

При значениях параметров $a = 6,25$, $P_1 = 12$, $P_2 = 10$, $P_3 = 7$, $P_4 = 6$ дискриминант квадратного уравнения отрицательный и, следовательно, квадратное уравнение не имеет решения. Мы еще одним способом доказали невозможность существования квадрата из задачи 1.

Обратите внимание, что в условии задачи 1 периметры всех треугольников – натуральные числа. Это понятно: автор хотел облегчить семиклассникам вычисление ответа. Однако следует учесть, что если мы имеем дело с прямоугольными треугольниками, то в наших построениях могут появиться несоизмеримые отрезки. Поэтому подбор параметров, при котором периметры треугольников являются целочисленными, это отдельный вопрос, связанный не только с геометрией, но и с теорией чисел.

Мы так долго говорили о невозможности конструкции из задачи 1, что хочется увидеть пример параметров, для которых конструкция возможна. Подойдут, например, значения $a = 7$, $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 12$, где от квадрата со стороной 7 отрезаны четыре египетских прямоугольных треугольника со сторонами 3, 4 и 5.

Ромб

Мы один раз уже шевелили условие первоначальной задачи, пытаясь заменить квадрат на прямоугольник. Но что произойдет, если в условии задачи квадрат заменить на ромб? Переформулируем задачу.

Задача 6. От ромба $ABCD$ отрезали треугольники и внутри каждого из них написали его периметр (рис.5). Найдите сторону

Рис. 5

ромба $ABCD$ при условии, что периметр четырехугольника $FGHE$ равен 10.

Пусть длина стороны ромба $ABCD$ равна r . Применим рассуждения со сложением и вычитанием периметров треугольников из решения задачи 1 и найдем, что $r = 6,25$.

Учитывая предыдущий опыт, нам интересно знать: *существует ли такой ромб?*

Отметим, что случай, когда угол A ромба тупой, практически ничем не отличается от случая квадрата. В случае, когда угол A ромба острый, переформулированная задача оказалась серьезное сопротивление, и нам не удалось полностью ответить на поставленный вопрос.

Обратим внимание, что рассуждения, которые мы применяли для четырехугольника, вписанного в прямоугольник, в случае с ромбом не проходят. Вписанный четырехугольник может располагаться близко к меньшей диагонали ромба, что не позволяет получить требуемую оценку на величину периметра. Возможно, читатели будут более удачливы и найдут ответ на вопрос – существует ли такой ромб?

Предлагаем читателям решить самостоятельно еще несколько задач.

Задачи для самостоятельного решения

1. Дана окружность с центром в точке O и с диаметром BD (рис.6). Известно, что $AF = 4$, $CG = 2$, $AE = OG = FG = 3$. Найдите BE .

2. а) Внутри квадрата $ABCD$ выбрана точка P . Из точки P к серединам сторон квадрата проведены четыре отрезка (рис.7). Известны площади трех четырехугольников $S_1 = 16$, $S_2 = 20$, $S_3 = 32$.

Рис. 6

Найдите площадь четвертого четырехугольника.

б) Будет ли корректным условие задачи, если в качестве значений площадей трех четырехугольников будут выбраны некоторые три произвольных положительных числа S_1, S_2, S_3 ?

Рис. 7

3. Дана пирамида $ABCD$ (рис.8). Точка P движется по прямой BC . Обозначим: $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$, $\overrightarrow{BP} = t \cdot \overrightarrow{BC}$. Известно, что

Рис. 8

$\angle BAC = \angle CAD = 60^\circ$, $\angle BAD = 120^\circ$, $|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}| = 1$. При каких значениях параметра t угол между $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{AD}$ равен углу между $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{AC}$?

В заключение нашей работы над ошибками напомним цитату выдающегося физика Петра Леонидовича Капицы, который говорил: «Свобода творчества – свобода делать ошибки».

Авторы благодарят Е.Теренкова за ценные замечания.