Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Кушнир, Бипедальные равновеликости, *Квант*, 2020, номер 6, 25–28

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20200603>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 17:05:55

Примечание. Для малого угла φ справедливы приближенные формулы $\cos \varphi \approx 1$ и $\sin \varphi \approx \varphi$.

На рисунке 2 показан ход двух параллельных лучей, составляющих известный угол α с горизонтальной нормалью к поверхности сферы. В точке A на пересечении

Рис. 2

продолжений отраженных лучей будет наблюдаться изображение Солнца. Если угол между радиусами, проведенными в точки P и Q , равен $\angle POQ = \Delta$, то угол между продолжениями отраженных лучей равен $\angle PAQ = 2\Delta$, поскольку при повороте зеркала на угол Δ отраженный луч поворачивается на 2Δ . Угол Δ определяется размером зрачка и, очевидно, мал. Другие углы равны, соответственно,

$$\angle APO = \alpha, \quad \angle AQP = \frac{\pi}{2} - \alpha - \Delta \approx \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Запишем теорему синусов для треугольника PAQ и, учитывая что 2Δ — малый угол, получим равенство

$$PA = \frac{PQ}{2\Delta} \cos \alpha.$$

Отсюда, поскольку справедливо приближенное соотношение $PQ \approx R\Delta$, находим

$$PA = \frac{R \cos \alpha}{2}.$$

Можно убедиться в том, что это уравнение задает полуокружность радиусом $0,25R$, центр которой располагается на отрезке OP на расстоянии $0,75R$ от точки O . При изменении угла α точка A сдвигается по этой окружности. Угловой размер Солнца равен φ , поэтому угол падения пучков параллельных лучей от Солнца изменяется в пределах от α до $\alpha + \varphi$. Пусть лучам, падающим под углом α , соответствует точка A , а лучам, падающим под углом $\alpha + \varphi$, — точка A_1 (рис.3). Характерный размер

Рис. 3

изображения Солнца можно считать равным высоте треугольника PA_1A , опущенной из вершины A_1 . В первом приближении эта высота равна

$$\Delta L = \frac{R \cos \alpha}{2} \varphi.$$

А.Бычков, П.Крюков

Бипедальные равновеликости

И.КУШНИР

В этой статье мы расскажем о нескольких геометрических «приключениях» и, в частности, решим задачу М2590. В них появятся равновеликие фигуры в конструкциях с перпендикулярами, проведенными из точки, лежащей на стороне треугольника, к двум его другим сторонам. Такие перпендикуляры мы будем называть «бипедалями».

Приключение первое. Пусть в остро-

угольном треугольнике ABC проведена высота AH_1 , из H_1 проведены бипедали H_1M_H и H_1N_H (рис.1).

Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC . Выдающийся геометр З.А.Скопец рассматривал условие принадлежности O прямой — «посадил» точку O на отрезок M_HN_H ! Оказывается, при вы-

Рис. 1

полнении этого условия отрезок будет «равноделящей», т.е. разделит площадь треугольника пополам. Итак,

Задача 1. В остроугольном треугольнике ABC известно, что точка O лежит на отрезке $M_H N_H$. Докажите, что отрезок $M_H N_H$ делит площадь треугольника ABC пополам.

Вначале приведем схему «формульного» решения задачи.

Понадобятся следующие утверждения для произвольного треугольника ABC , которые предлагаем читателю доказать самостоятельно:

$$1. OA \perp M_H N_H;$$

$$2. M_H N_H = \frac{S}{R},$$

где S – площадь треугольника ABC , R – радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

Из утверждений 1 и 2 легко следует решение задачи. Поскольку $OA \perp M_H N_H$, то в треугольнике $AM_H N_H$ отрезок OA будет высотой, а длина стороны $M_H N_H$ равна $\frac{S}{R}$, значит,

$$S_{AM_H N_H} = \frac{1}{2} R \cdot \frac{S}{R} = \frac{1}{2} S.$$

Поэтому площади треугольника $AM_H N_H$ и четырехугольника $M_H C B N_H$ равны, а $M_H N_H$ – равноделящая.

Задача имеет и чисто геометрическое решение.

Проведем диаметр AA_1 (рис.2). Поскольку $M_H O$ – медиана треугольника $AM_H A_1$, то $S_{AM_H O} = S_{A_1 M_H O}$. Аналогично, $S_{AN_H O} = S_{A_1 N_H O}$. Отсюда $S_{AM_H N_H} = S_{A_1 M_H N_H}$ (на самом деле треугольники $AM_H N_H$ и $A_1 M_H N_H$ равны, поскольку $OA \perp M_H N_H$). Тем самым, задача сводится к доказательству равенства площадей четырехугольника $AM_H A_1 N_H$ и треугольника ABC .

Общая часть четырехугольника $AM_H A_1 N_H$ и треугольника ABC – пятиугольник $AM_H E F N_H$ (см.рис.2), поэтому достаточно понять, что $S_{EFA_1} = S_{ECM_H} + S_{FBN_H}$. Так как угол ACA_1 опирается на диаметр, он равен 90° , откуда $CA_1 \parallel M_H H_1$. Далее из трапеции $M_H H_1 A_1 C$ получаем

Рис. 2

$S_{A_1 C H_1} = S_{A_1 C M_H}$ и $S_{EA_1 H_1} = S_{ECM_H}$. Аналогично доказывается равенство $S_{FA_1 H_1} = S_{FBN_H}$, и в силу равенства $S_{EFA_1} = S_{EH_1 A_1} + S_{FH_1 A_1}$ решение закончено.

Приключение второе (точка O «сбежала» с отрезка $M_H N_H$). Посмотрев на геометрическое решение задачи 1, мы видим, что в доказательстве равенства $S_{AM_H A_1 N_H} = S_{ABC}$ никак не использовалось, что точка O лежит на $M_H N_H$ (это условие использовалось только в замечании о равенстве треугольников $AM_H N_H$ и $A_1 M_H N_H$). Читатель может доказать равенство $S_{AM_H A_1 N_H} = S_{ABC}$ и «формульно», снова используя формулы 1 и 2.

Если O не лежит на $M_H N_H$, также в силе остаются равенства $S_{AM_H O} = S_{A_1 M_H O}$, $S_{AN_H O} = S_{A_1 N_H O}$ и, значит, $S_{AM_H O} + S_{AN_H O} = S_{ABC}/2$. Таким образом, мы получили решение такой задачи:

Задача 2 (M2590). В остроугольном треугольнике ABC точка O – центр описанной окружности, H_1 – основание высоты, проведенной из точки A , а M_H и N_H – проекции точки H_1 на AC и AB соответственно (рис. 3). Докажите, что ломаная

Рис. 3

ная $M_H ON_H$ делит площадь треугольника ABC пополам.

Приключение третье (диаметральная равновеликость). Удивительно, но равновеликость $S_{AM_H A_1 N_H} = S_{ABC}$ остается в силе для бипедалей произвольной точки отрезка BC (а не только для основания высоты). Получается новая задача.

Задача 3 (теорема диаметальной равновеликости). Пусть в остроугольном треугольнике ABC точка X — произвольная точка отрезка BC , XM_X и XN_X — бипедали этой точки, а точка A_1 диаметрально противоположна точке A . Докажите, что площадь четырехугольника $AM_X A_1 N_X$ равна площади треугольника ABC .

Проверьте, что рассуждения из геометрического решения задачи 1 сохраняются без изменений и дают решение задачи 3.

Приведем также схему вычислительного решения задачи 3.

Обозначим через φ угол между диаметром AA_1 и отрезком $M_X N_X$ (рис.4). Тогда

$$\begin{aligned} S_{AM_X A_1 N_X} &= \frac{1}{2} AA_1 \cdot M_X N_X \sin \varphi = \\ &= R \cdot M_X N_X \sin \varphi. \end{aligned}$$

Окружность с диаметром AX проходит через M_X , N_X и H_1 . Отсюда, в частности, $M_X N_X = AX \sin \angle A$. После подстановки и «эквивилибристики» $R \cdot AX \sin \angle A \sin \varphi = (R \sin \angle A)(AX \sin \varphi)$ получаем $S_{AM_X A_1 N_X} = \frac{1}{2} BC (AX \sin \varphi)$. Поскольку $AX \sin \angle AXH_1 = AH_1$, остается понять, что φ равен $\angle AXH_1$

Рис. 4

или $180^\circ - \angle AXH_1$, в зависимости от расположения точек. Несложный подсчет углов на рисунке 4 дает:

$$\begin{aligned} \angle AXH_1 &= \angle AXN_X + \angle N_X XH_1 = \\ &= \angle AM_X N_X + \angle N_X A H_1 = \\ &= \angle AM_X N_X + \angle M_X A A_1 = \varphi. \end{aligned}$$

Приключение четвертое (изогональная равновеликость). Как и прежде, на стороне BC остроугольного треугольника ABC берем произвольную точку X (рис.5) и проводим бипедали XM_X и XN_X .

Рис. 5

Задача 4. Точка X лежит на стороне BC остроугольного треугольника ABC . Через точку A проведем прямую, симметричную прямой AX относительно биссектрисы угла BAC (ее называют также изогональю для AX), и пусть эта прямая пересекает описанную окружность в точке Y . Докажите, что площадь четырехугольника $AM_X N_X Y$ равна площади треугольника ABC .

Отметим, что в случае, когда AX — биссектриса угла BAC , AY тоже совпадает с биссектрисой, и задача 4 в этом частном случае превращается в задачу М1076, которая была придумана автором еще в 1980-х годах и вошла в вариант Международной математической олимпиады 1987 года.

В задаче 4 снова можно комбинировать как вычислительный, так и геометрический подходы. Приведем два решения.

Первое решение. Подсчет углов показывает, что $M_X N_X \perp AY$. Действительно, $\angle AN_X M_X + \angle YAN_X = \angle AXM_X + \angle XAM_X = 90^\circ$. Далее заметим, что треугольник AXC подобен (по двум углам) треугольнику ABY ,

откуда $AC \cdot AB = AX \cdot AY$. Кроме того, как мы видели ранее, $M_X N_X = AX \sin \angle A$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} S_{AM_X Y N_X} &= \frac{1}{2} AY \cdot M_X N_X = \frac{1}{2} AY \cdot AX \sin \angle A = \\ &= \frac{1}{2} AC \cdot AB \sin \angle A = S_{ABC}. \end{aligned}$$

Задача решена.

Второе решение. В силу диаметральной равновеликости (см. задачу 3), достаточно доказать равенство площадей четырехугольников $AM_X Y N_X$ и $AM_X A_1 N_X$ (рис. 6) или, что эквивалентно, равенство площадей треугольников $A_1 M_X N_X$ и $Y M_X N_X$. Последнее следует из того, что $M_X A_1 Y N_X$ –

Рис. 6

трапеция, поскольку $M_X N_X \perp AY$ (это показано в начале первого решения) и $\angle A Y A_1 = 90^\circ$ (так как AA_1 – диаметр).

Все!

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

ИТОГИ КОНКУРСА ИМЕНИ А.П.САВИНА 2019/20 УЧЕБНОГО ГОДА

ПОБЕДИТЕЛИ

Лучших результатов добились школьники
Бирюлин Алексей – Москва, школа 179, 7 кл.,
Дренчева Мария – Болгария, София, Софийская математическая гимназия, 8 кл.,
Федоров Александр – Москва, школа 1514, 9 кл.,
Часовских Иван – Химки, Московская обл., школа 14, 6 кл.

ПРИЗЕРЫ

Также хороших результатов добились школьники
Сушкова Владислава – Сыктывкар, республика Коми, Физико-математический лицей-интернат, 8 кл.,
Саначев Иван – Москва, школа 1583, 4 кл.

и команды

команда математической группы Центра «Успех» Гатчинского муниципального района Ленинградской области (руководитель Павлов Сергей Павлович);

Тюков Даниил (9 кл.), Федорова Алина (9 кл.), Еронин Валерий (9 кл.), Титеева Нелли (8 кл.), Сергеев Артем (7 кл.), Кучер Анастасия (7 кл.), Валько Валентина (7 кл.), Красильников Андрей (6 кл.), Сологуб Александр (6 кл.),

команда МАОУ «Академический Лицей» города Магнитогорска (руководитель Мошкин Виталий Станиславович);

Мозговой Кирилл (9 кл.), Чернов Богдан (9 кл.), Сафронова Ольга (9 кл.), Казакова Екатерина (8 кл.), Гофштейн Лев (8 кл.), Кучкина Валерия (8 кл.), Иванова Ирина (8 кл.),

команда учеников 8М и 9М классов школы 1329 города Москвы:

Бутрова Ирина (9 кл.), Волошин Александр (8 кл.), Галкин Савва (8 кл.), Журин Иван (8 кл.), Ильин Константин (8 кл.), Наумов Леонид (9 кл.).

Поздравляем!

Победителям и призерам будут высланы дипломы журнала «Квант» и призы от издательства МЦНМО. Помимо этого призы получают наиболее активные участники конкурса.