Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Заславский, Еще раз о муравье на цилиндре, *Квант*, 2020, номер 6, 34–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20200606>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 16:26:37

Рис. 5

на окружности (рис.5). Теперь все отрезки занимают круг, ограниченный нашим колесом. Значит, площадь лепестка равна площади круга.

– Какое-то странное объяснение, – усомнился Кузька. – Это доказательство? Разве так можно рассуждать?

– Тебя же предупредили: средневековая магия! – сказал дятел Спятел. – Без специальной подготовки даже не пытайся!

– Если тебе кажется необидительной идея разбивать лепесток на отрезки, давай разобьем его на горизонтальные планочки, – предложила Бусенька. – Сдвинутые планки уже не будут в точности совпадать с кругом, но чем мельче нарежем, тем меньше будет различие между кругом и фигурой, составленной из планочек (рис.6). Так что площадь лепестка все-таки равна площади круга.

– Здорово, – сказал Кузька. – Кажется, я понял. Неужели уже в XVII веке люди были такими умными?

Рис. 6

– Нет, – сказал дятел Спятел.

– Да, – сказала Бусенька. – Площадь арки циклоиды они находили еще ухищреннее.

– Прекрасно, прекрасно, не расслабляемся! – вдруг оживилась Огрыза. – Итак, мы нашли площадь арки циклоиды, она равна $3\pi r^2$. Для нашей арки получается уравнение $3\pi r^2 = 0,7$. Отсюда r равно, эээ, ммм..., r равно 27 сантиметров! В бой!

Через три дня друзья с большими усилиями уложили на кровать новый матрас.

НАМ ПИШУТ

Еще раз о муравье на цилиндре

А.ЗАСЛАВСКИЙ

В статье И.Акулича «Муравей на цилиндре» («Квант» №2 за 2020 г.) обсуждается такая задача: Дан цилиндр с радиусом основания 1 и высотой h . В точке A , лежащей на окружности нижнего основания цилиндра сидит муравей. Найдите кратчайший путь

муравья в противоположную точку B , лежащую на окружности верхнего основания цилиндра.

В статье справедливо отмечается, что возможными кратчайшими путями являются путь, состоящий из образующей цилиндра AA' и диаметра основания $A'B$, а также путь, идущий по боковой поверхности цилиндра и изображающийся на ее развертке прямой линией. Длина первого пути равна $h + 2$, второго – $\sqrt{h^2 + \pi^2}$. Эти значения совпадают при $h = \frac{\pi^2}{4} - 1$. Для меньших значений h

(такие цилиндры будем называть *низкими*) короче будет первый путь, для больших (*высокие* цилиндры) – второй.

Однако найденное значение необходимо сравнить с длинами еще нескольких путей. В статье Акулича рассмотрен один из таких путей, идущий из точки A по боковой поверхности в некоторую точку C окружности верхнего основания, а затем по отрезку CB . Если длина дуги $A'C$ равна φ , то длина такого пути равна $\sqrt{h^2 + \varphi^2} + 2 \cos(\varphi/2)$. В статье Акулича ищутся первая и вторая производные этой функции, а затем показывается, что в точке, в которой первая производная равна нулю, вторая положительна. Из этого следует, что в найденной точке длина пути имеет не минимум, а максимум, т.е. данный путь не может быть кратчайшим.

Но к этому выводу можно прийти без вычисления производных. Если траектория ACB является кратчайшей, она должна при переходе через окружность верхнего основания образовывать с ней равные углы с обеих сторон. Именно это означает найденное Акуличем условие равенства нулю производной, но необходимость этого условия легко понять, представив себе натянутую вдоль пути резинку. Если углы с двух сторон не равны, резинка, сокращаясь, будет сползать в соответствующую сторону.

Таким образом, если сделать развертку боковой поверхности цилиндра и приложить к ней в точке C основание (рис.1), то путь ACB будет изображаться отрезком. Очевидно, что угол между этим отрезком и радиусом OC (а значит, и образующей AA') равен $\varphi/2$, следовательно, $\operatorname{tg}(\varphi/2) = \varphi/h$. Соответственно, $h = \varphi \operatorname{ctg}(\varphi/2)$, а длина пути равна $\varphi/\sin(\varphi/2) + 2 \cos(\varphi/2)$.

Сравним теперь две величины $s_1 = \varphi/\sin(\varphi/2) + 2 \cos(\varphi/2)$ и $s_2 = 2 + h = 2 + \varphi \operatorname{ctg}(\varphi/2)$. Имеем

$$s_1 - s_2 = \left(1 - \cos \frac{\varphi}{2}\right) \left(\frac{\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}} - 2 \right).$$

Поскольку $\sin(\varphi/2) < \varphi/2$, оба множителя положительны, т.е. $s_1 > s_2$.

Аналогично можно исследовать еще один путь, о котором упоминается в конце статьи Акулича. Он состоит из хорды AD нижнего основания, пути по боковой поверхности в точку C окружности верхнего основания и хорды CB . Так как углы между траекторией и образующими в точках C и D равны, траектория образует равные углы и с проведенными в эти точки радиусами оснований, следовательно, $AD = BC$ (рис.2).

Рис. 2

Предлагаем читателям решить следующие задачи.

Задача 1. При каких h пути такого вида существуют?

Задача 2. Может ли такой путь быть кратчайшим?

Зададимся теперь вопросом, является ли точка B самой далекой от A точкой поверхности цилиндра. Для низких цилиндров ответ на этот вопрос положительный, что вытекает из следующей задачи.

Задача 3. Докажите, что муравей может попасть из любой точки на поверхности цилиндра в любую другую, проползая не больше чем $2 + h$. (Подсказка. Можно ограничиться путями, состоящими из отрезков образующих и хорд оснований.)

Из задачи 3 следует, что для любого цилиндра центры оснований являются наиболее удаленными друг от друга точками поверхности. Но, по крайней мере для низких цилиндров, есть и другие пары точек, для

которых расстояние достигает максимального значения.

При достаточно больших h точка B не будет наиболее удаленной от A . Действительно, для высоких цилиндров кратчайшее расстояние от A до A' равно h , а до противоположной точки $B - \sqrt{h^2 + \pi^2}$. Разность этих величин

$$\sqrt{h^2 + \pi^2} - h = \frac{\pi^2}{\sqrt{h^2 + \pi^2} + h} < \frac{\pi^2}{2h}$$

при росте h стремится к нулю. Таким образом, при достаточно больших h расстояния от A до всех точек окружности верхнего основания примерно равны. Поэтому наиболее удаленная от A точка должна лежать достаточно близко к центру O верхнего

основания. Итак, до некоторого значения h наиболее удаленная от A точка совпадает с B , а затем она начинает двигаться в сторону точки O . Если наиболее удаленная точка единственная, то она лежит на отрезке BO . Но, возможно, существуют две такие точки, симметричные относительно этого отрезка.

Автору не удалось найти точную зависимость положения наиболее удаленной точки от h . Возможно, это получится у читателей.

В заключение рекомендуем читателям ознакомиться со статьей М.Н.Вялого «Кратчайшие пути по поверхности параллелепипеда» в «Математическом просвещении» (№9 за 2005 г). В ней задачи, аналогичные рассмотренным, решаются для поверхности прямоугольного параллелепипеда.

ОЛИМПИАДЫ

XII Международная олимпиада Romanian Master of Mathematics

В конце февраля в столице Румынии Бухаресте вот уже в двенадцатый раз прошла олимпиада Romanian Master of Mathematics (RMM). За годы проведения олимпиада Romanian Master зарекомендовала себя как одно из сложных математических соревнований для школьников во всем мире. Так и было задумано организаторами из математического общества Румынии. По их замыслу, RMM должна была стать аналогом главного математического соревнования, Международной математической олимпиады (IMO), для более узкого круга участников: на RMM ежегодно приглашаются команды около 20 стран, занимающих лидирующие позиции на IMO.

Команду России на RMM представляли:

Данила Дёмин (Сочи, 10 кл.),
Иван Гайдай-Турлов (Москва, 11 кл.),
Максим Туревский (Санкт-Петербург, 9 кл.),
Данил Сибгатуллин (Казань, 10 кл.),
Константин Мясников (Челябинск, 11 кл.).

Слева направо: К.Мясников, М.Туревский. И.Гайдай-Турлов, Д.Сибгатуллин, Д.Дёмин

Наши ребята выступили очень успешно: среди 107 участников олимпиады десять лучших получили золотые медали, и все наши школьники попали в эту «золотую десятку». В командном зачете Россия заняла 1 место и завоевала переходящий главный приз – серебряную тарелку. За все двенадцать про-