Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Власов, Пропала энергия. «Коварная» материальная точка,
Квант, 2020, номер 7, 34–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20200704>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает,
что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 13:53:26

Пропала энергия. «Коварная» материальная точка

А.ВЛАСОВ

Классическая физика (в большей степени абстрактную модель «материальной» точки. Эта модель часто присутствует и в олимпиадных физических задачах. В данной статье рассматривается пример такой задачи. Можно надеяться, что ее решение будет хорошей иллюстрацией свойств материальной точки.

На одном из тренингов по решению задач экспромтом была придумана простенькая (как казалось) задача на «связанное» движение. «Актрисой» в этой задаче должна была выступать материальная точка, которая находится на ободе невесомого колеса. Отметим (и будем об этом помнить) предельную абстрактность физической схемы этой задачи.

Вот первоначальный сценарий задачи. Поставим колесо на горизонтальную плоскость. Будем удерживать его в положении, при котором материальная точка находится на уровне центра колеса (рис.1). Освобождаем систему. Как будет двигаться колесо и, соответственно, как будет двигаться материальная точка? На возможное движение наложим «связи»: колесо должно катиться по нижней плоскости без проскальзывания, покидать поверхность запрещено. Проскальзывание можно исключить микрорубчатым

Рис. 1

зацеплением колеса с нижней поверхностью. Второе условие может обеспечить верхняя горизонтальная гладкая плоскость, расположенная на высоте диаметра обруча.

Рис. 2

Школьное (не очень «внимательное») решение привело нас к неожиданному результату. Очевидно, что при качении колеса материальная точка будет двигаться по отрезкам циклоиды (рис.2) и, в соответствии с законом сохранения энергии, она (точка) после падения на пол (нижнюю плоскость) должна вновь подняться на прежнюю высоту. Но известно, что при качении колеса (движении без проскальзывания) скорость центра колеса и орбитальная скорость равны по модулю. Тогда скорость точки обода, которая ложится на дорогу, становится равной нулю, так как в этот момент скорость центра колеса и орбитальная скорость противоположны по направлению (рис.3).

Рис. 3

Судьба материальной точки на ободе колеса оказалась печальной. Опустившись на дорогу, она остановилась! Движение исчезло! Проблему «пропажи» первоначальной потенциальной (гравитационной) энергии системы школьная физика не смогла решить.

Попробуем разобраться с возникшей проблемой. Во-первых, вернемся к реальной физике. Материальная точка – абстрактный объект физической теории, основой поведения которого является аксиоматика геометрической точки. Материальная точка помимо массы может иметь электрический заряд, магнитный момент и другие физические параметры. Но для нее нет понятия вращения и, соответственно, момента инерции и момента импульса. В нашей задаче есть вращение. И эту реальность нужно восстановить.

С этих позиций сформулируем задачу так. На невесомом обруче радиусом R закреплен

небольшой массивный шарик. Радиус шарика r . Оставляя прежними условия связанного движения, исследуем физику движения колеса. (При опускании шарика на дорогу условия качения не должны нарушаться, соответствующую конструкцию системы колесо-шарик придумать не очень сложно.) Очевидно, что, осуществляя предельный переход $r \rightarrow 0$ (при постоянной массе шарика), мы вернемся к первоначальному варианту задачи и сможем понять причину энергетического парадокса.

Приведем решение этого (реального) варианта задачи. Делаем рисунок с системой сил, действующих на колесо, и вводим систему координат (рис.4). Математика решения начинается с системы уравнений связи:

Рис. 4

$$\begin{cases} x = R \cdot \alpha, \\ x_0 = R(\alpha + \cos \alpha), \\ y_0 = R(1 - \sin \alpha). \end{cases}$$

Отсюда получаем уравнения для скорости:

$$\begin{cases} \dot{x} = R \cdot \dot{\alpha}, \\ \dot{x}_0 = R(1 - \sin \alpha) \cdot \dot{\alpha}, \\ \dot{y}_0 = -R \cos \alpha \cdot \dot{\alpha} \end{cases}$$

и для ускорения:

$$\begin{cases} \ddot{x} = R \cdot \ddot{\alpha}, \\ \ddot{x}_0 = R(-\cos \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 + (1 - \sin \alpha) \cdot \ddot{\alpha}), \\ \ddot{y}_0 = R(\sin \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 - \cos \alpha \cdot \ddot{\alpha}). \end{cases}$$

Здесь x — координата центра колеса, x_0, y_0 — координаты центра шарика.

Уравнения динамики для шарика (поступательное и вращательное движения) имеют вид

$$\begin{cases} N - mg = mR(\sin \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 - \cos \alpha \cdot \ddot{\alpha}), \\ F = mR(-\cos \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 + (1 - \sin \alpha) \cdot \ddot{\alpha}), \\ N \cdot R \cos \alpha - F \cdot R(1 - \sin \alpha) = \frac{2}{5}mr^2 \cdot \ddot{\alpha}, \end{cases}$$

или в безразмерных переменных —

$$\begin{cases} n = 1 + \sin \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 - \cos \alpha \cdot \ddot{\alpha}, \\ f = -\cos \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 + (1 - \sin \alpha) \cdot \ddot{\alpha}, \\ n \cdot \cos \alpha - f \cdot (1 - \sin \alpha) = \frac{2}{5} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \cdot \ddot{\alpha}. \end{cases}$$

Здесь $n = \frac{N}{mg}$, $f = \frac{F}{mg}$, $j = \frac{2}{5} \left(\frac{r}{R} \right)^2$ — безразмерный момент инерции, $\tau^2 = \frac{R}{g}$ — квадрат

безразмерного времени.

Закон сохранения энергии дает последнее уравнение:

$$mgR \cdot \sin \alpha = \frac{mR^2}{2} \left((1 - \sin \alpha)^2 + \cos^2 \alpha + j \right) \cdot \dot{\alpha}^2.$$

В итоге имеем следующую систему уравнений в безразмерных переменных:

$$\begin{cases} n = 1 + \sin \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 - \cos \alpha \cdot \ddot{\alpha}, \\ f = -\cos \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 + (1 - \sin \alpha) \cdot \ddot{\alpha}, \\ n \cdot \cos \alpha - f \cdot (1 - \sin \alpha) = j \cdot \ddot{\alpha}, \\ 2 \cdot \sin \alpha = (2(1 - \sin \alpha) + j) \cdot \dot{\alpha}^2. \end{cases}$$

Параметром уравнений будем считать угол поворота колеса. Искомыми функциями являются: угловая скорость, угловое ускорение, нормальная и касательная составляющие реакции нижней плоскости. После решения системы получаем

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 = \frac{2 \cdot \sin \alpha}{2(1 - \sin \alpha) + j}, \\ \ddot{\alpha} = \frac{(2 + j) \cos \alpha}{(2(1 - \sin \alpha) + j)^2}, \\ n = 1 + \frac{2 \cdot \sin^2 \alpha}{2(1 - \sin \alpha) + j} - \frac{(2 + j) \cos^2 \alpha}{(2(1 - \sin \alpha) + j)^2}, \\ f = \frac{(2 + j) \cos \alpha (1 - \sin \alpha)}{(2(1 - \sin \alpha) + j)^2} - \frac{2 \cdot \sin \alpha \cos \alpha}{2(1 - \sin \alpha) + j}. \end{cases}$$

Все решения (функции) достаточно замысловаты. Дополнительные усложнения вносит параметр j (безразмерный момент инерции шарика). Но для компьютера это не является проблемой. В итоге получаем очень красивые и интересные графики, которые

Рис. 5

Рис. 6

Рис. 7

Рис. 8

построены в интервале угла поворота колеса $\left(0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \rightarrow \pi\right)$. В этом диапазоне угла α шарик опускается на плоскость и вновь поднимается на прежнюю высоту.

График зависимости углового ускорения от угла поворота колеса (рис.5) построен при различных значениях относительного радиуса шарика $\left(\frac{r}{R} = 0,5; 0,4; 0,3; 0,2\right)$. Все

последующие графики построены в этом же диапазоне размеров шарика.

На рисунке 6 приведен график квадрата угловой скорости. При касании шарика нижней плоскости потенциальная (гравитационная) энергия полностью перекачивается в энергию вращения шарика. В этот момент угловая скорость вращения максимальна. Далее происходит обратный энергетический процесс.

График нормальной составляющей силы реакции плоскости представлен на рисунке 7. Даже для достаточно большого шарика $\left(\frac{r}{R} = 0,2\right)$ амплитуда реакции плоскости

превосходит силу тяжести шарика на два порядка. Интересная особенность графика проявляется при большом увеличении (рис.8). Видно, что при некотором значении радиуса шарика возникает область отрицательного значения нормальной реакции плоскости. В этой области углов поворота обруча «работает» верхняя плоскость – она должна прижимать обруч к нижней плоскости. При уменьшении радиуса шарика угловая область отрицательного давления расширяется.

Рисунок 9 представляет график силы трения (касательной составляющей силы реакции плоскости). Здесь опять же интересным является смена положительного значения на отрицательное. Первоначально сила трения разгоняет центр масс системы (обруч – шарик). Далее вплоть до касания шарика нижней плоскости система тормозится.

Приведенные графики показывают, что уменьшение радиуса шарика (уменьшение его момента инерции) ведет к увеличению амплитуд всех величин. Предельный переход к материальной точке неизбежно приводит к бесконечным амплитудам.

Рис. 9

Рассмотренное движение шарика, которое ему «навязывает» безмассовый обруч при отсутствии проскальзывания, можно рассматривать как удары о плоскость. Шарик как бы «прыгает» на плоскости. При этом амплитуда силового импульса зависит от момента инерции шарика. Теперь понятно, куда «исчезает» потенциальная (гравитационная) энергия системы. Она перекачивается в энергию вращения. Для материальной точки такой переход невозможен.

Дополнительно отметим, что среднее значение (во времени) нормальной составляющей реакции опоры (в безразмерном виде) ожидаемо равно 1 и, соответственно, среднее значение касательной составляющей реакции равно 0.

В заключение приведем «численный» вариант задачи.

Условие. На легком обруче радиусом R закреплен небольшой шарик массой m и радиусом r . Поставим обруч на горизонтальную плоскость. Будем удерживать его так, чтобы центр шарика находился на уровне центра обруча. Освобождаем систему. При дальнейшем движении обруча выполнены следующие условия: отсутствует проскальзывание, контакт с нижней плоскостью не нарушается. Движение обруча по вертикали ограничивает горизонтальная гладкая плоскость, расположенная на высоте диаметра обруча. Определите, при каком соотношении R/r максимальное значение нормальной реакции нижней плоскости будет больше силы тяжести шарика в n раз. Вычислите значение R/r при $n = 1000$. При этом значении R/r определите период колебаний обруча.

Решение. Используя готовое решение, находим

$$n = 1 + \frac{2 \cdot \sin^2 \alpha}{2(1 - \sin \alpha) + j} - \frac{(2 + j) \cos^2 \alpha}{(2(1 - \sin \alpha) + j)^2} \Big|_{\alpha = \frac{\pi}{2}} = 1 + \frac{2}{j}.$$

Поскольку $j = \frac{2}{5} \left(\frac{r}{R} \right)^2$, получаем

$$n = 1 + 5 \left(\frac{R}{r} \right)^2,$$

откуда

$$\frac{R}{r} = \sqrt{\frac{n-1}{5}}.$$

При $n = 1000$ отношение радиусов $\frac{R}{r} \approx 14$.

Для вычисления периода колебаний используем решение для угловой скорости:

$$\dot{\alpha}^2 = \frac{2 \cdot \sin \alpha}{2(1 - \sin \alpha) + j}.$$

Это уравнение можно упростить, учитывая малое значение величины $j = \frac{2}{5} \left(\frac{r}{R} \right)^2$:

$$\dot{\alpha}^2 = \frac{\sin \alpha}{1 - \sin \alpha}.$$

Отсюда $\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{\frac{\sin \alpha}{1 - \sin \alpha}}$, или

$$dt = \sqrt{\frac{1}{\sin \alpha} - 1} \cdot d\alpha.$$

Интегрируем:

$$T = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{\sin \alpha} - 1} \cdot d\alpha$$

и для безразмерного «циклоидального» периода получаем

$$T_0 = 4 \cdot \ln \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right) \approx 7,05,$$

а в обычных единицах –

$$T \approx 7,05 \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Рис. 10

Этот результат интересно сравнить с периодом вертикальных «колебаний» шарика на

упругой плите (шарик падает с высоты R)

$$T_0 = 4\sqrt{2} \sqrt{\frac{R}{g}} \approx 5,66 \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Графическая иллюстрация к вычислению периода T дана на рисунке 10. На нем показана зависимость угла поворота колеса от времени. Для наглядности угол поворота изменяется в интервале $\left(0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \rightarrow 0\right)$. Красный график соответствует движению обруча с материальной точкой. Сдвинутый синий график построен для движения обруча с достаточно большим шариком $\left(\frac{r}{R} = 0,5\right)$. Для маленького шарика «сдвиг» периода практически незаметен. На нижнем графике в увеличенном виде показаны пики кривых в момент прохождения нижней точки. Для материальной точки (шарика с очень малым диаметром) производная (угловая скорость) стремится к бесконечности.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

К ПОНЯТИЮ действительного числа

Э.ВИНБЕРГ

ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО мыслится как результат бесконечной последовательности измерений со все возрастающей точностью. Давайте посмотрим, какой это может иметь смысл. Известно, что точность физических измерений не превосходит 15 значащих цифр, и есть принципиальные ограничения точности из-за прерывистости

материи. Но даже если бы этой трудности не было, все равно бесконечная последовательность измерений никогда не могла бы быть завершена! Поэтому данное выше «определение» действительного числа должно пониматься как мысленный образ.

Можно дать точное определение действительного числа, не используя слова «измерение». Назовем действительным числом всякую бесконечную последовательность рациональных чисел

$$r_1, r_2, \dots, r_n, \dots, \quad (1)$$

все меньше и меньше отличающихся друг от друга (с чем же еще сравнивать?). Последнее требование следует понимать так: для любого натурального числа m найдется такое n_0 , что при $n_1, n_2 > n_0$

$$|r_{n_1} - r_{n_2}| < \frac{1}{m}.$$

Последовательность, удовлетворяющая этому условию, называется *фундаментальной*.

Действительное число, определенное последовательностью (1), следует считать рав-

Опубликовано в сборнике «Математическая школа. Лекции и задачи. Выпуск II» (М.: МГУ, 1965).