Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Козеренко, Параллелограмм замечательных точек, *Квант*, 2020, номер 7, 42–43

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20200706>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 13:49:48

после остановки волчка меняется ее направление – это, видимо, раскручивается нитка.

Такое поведение кажется неожиданным для гироскопа, ведь на ракетах используется именно сохранение ориентации оси вращения гироскопа...

Сегодня цена этой игрушки настолько упала, что мировые производители наверняка утратили к ней интерес и массовое производство прекратилось. А жаль, было бы интересно поиграть с этим волчком, только с

заменой трех грузов одним тяжелым кольцом, чтобы волчок стал ближе к обычному гироскопу.

Полезно и поломать голову над тем, откуда берется сила, поворачивающая ось висящего на нити волчка (так сказать, призрак центробежной силы). И как проявляется в этом опыте закон сохранения момента количества движения системы.

Подумайте обо всем этом!

НАМ ПИШУТ

Параллелограмм замечательных точек

К. КОЗЕРЕНКО

СУЩЕСТВУЕТ ОГРОМНОЕ МНОЖЕСТВО замечательных точек, связанных с треугольником, более 30000 из них уже включены в известную энциклопедию Encyclopedia of Triangle Centers (ETC) Кларка Кимберлинга (Clark Kimberling). Конечно, многие точки интересны не только сами

по себе, но в связи с другими замечательными точками.

Здесь мы опишем весьма регулярную конструкцию из многих замечательных точек (см. рисунок). Она во многом резюмирует известные факты и результаты из статьи К. Козеренко и П. Факанова «Птолемеева ось треугольника» («Квант» №2 за 2017 г.).

Используем обозначения: ABC – произвольный треугольник, M – его центр масс, т.е. точка пересечения медиан AA_m , BB_m , CC_m , H – ортоцентр, O – центр описанной окружности, E – центр окружности девяти точек. Хорошо известно, что четыре перечисленные точки лежат на одной прямой (прямая Эйлера), при этом E – середина OH , а M делит отрезок OH в отношении $OM : MH = 1 : 2$. Это следует, например, из гомотетии

с центром в M и коэффициентом -2 , переводящей серединный треугольник $A_mB_mC_m$ в ABC , поскольку O является ортоцентром треугольника $A_mB_mC_m$: $O = H_m$. Здесь и далее индексом m обозначаем точку в серединном треугольнике, соответствующую точке в исходном треугольнике ABC .

Далее, пусть I – центр вписанной окружности, а N – точка Нагеля (напомним, что точкой Нагеля называют точку пересечения трех отрезков, соединяющих вершины треугольника и точки касания противоположных сторон с вневписанными окружностями). Известно, что I , M и N лежат на одной прямой (прямая Нагеля), при этом M делит отрезок IN в отношении $IM : MN = 1 : 2$. Точка I_m также лежит на прямой Нагеля (опять работает гомотетия с центром в M , переводящая $A_mB_mC_m$ в ABC), при этом $IM : MI_m = 2 : 1$, отсюда I_m – середина отрезка IN .

Сопоставляя расположения точек на прямых Эйлера и Нагеля, видим тройку гомотетичных с центром M треугольников:

$$IMO \sim MNH \sim I_m ME.$$

При этом:

$IMO \sim I_m ME$ (оранжевые треугольники) гомотетичны с коэффициентом 2;

$IMO \sim MNH$ – гомотетичны с коэффициентом $1/2$.

Из последнего вытекает, что $\overline{NH} = 2\overline{OI}$. Поэтому конструкцию можно достроить до параллелограмма, отразив O относительно I (отраженная точка – O_h). Итак,

$HNOO_h$ – параллелограмм с центром E .

Добавляя в рассмотрение точку Жергонна G (т.е. точку пересечения трех отрезков, соединяющих вершины треугольника ABC и точки касания сторон с вписанной окружностью – вершины треугольника Жергонна) и соответствующую точку G_m , получаем новые пары гомотетичных с центром M треугольников:

$IMG \sim I_m MG_m$ (желтые треугольники) с коэффициентом 2;

$HMG \sim OMG_m$ (серые треугольники) с коэффициентом 2.

И, как следствие, получаем параллельности:

$$I_m G_m \parallel IG;$$

$$OG_m \parallel HG.$$

В упомянутой статье «Птолемея ось треугольника» одной из ключевых точек являлся центр E_1 окружности Эйлера треугольника Жергонна. Там было показано, что E_1 лежит на прямых OI и HG , причем

$$\overline{IE_1} = \frac{r}{2R} \overline{OI};$$

$$\overline{GE_1} = \frac{r}{4R} \overline{HG}.$$

В частности, E_1 лежит на стороне нашего параллелограмма. Пусть E' симметрична E_1 относительно центра параллелограмма E , так что зеленые треугольники $O_h HE_1$ и NOE' равны (симметричны относительно E). Поскольку $HE_1 \parallel OE'$ (иначе говоря, $HE_1 OE'$ – параллелограмм), получаем, что

G_m лежит на OE' .

Новое интересное наблюдение состоит в том, что

I_m лежит на HG_m

или, эквивалентно,

$$GI \parallel G_m H.$$

В следующем абзаце мы укажем возможную схему доказательства этой параллельности, но читатель может вывести ее самостоятельно из уже накопленных фактов.

Схема доказательства параллельности $GI \parallel G_m H$. Достаточно доказать, что GI пересекает прямую Эйлера в точке X такой, что $\overline{MX} = 2\overline{HM}$ (или, эквивалентно, $\overline{OX} = \overline{HO}$). Это можно сделать, используя равенства $\overline{IE_1} = \frac{r}{2R} \overline{OI}$ и $\overline{GE_1} = \frac{r}{4R} \overline{HG}$.

Теперь мы видим еще одну пару гомотетичных треугольников (соответствующие стороны параллельны):

$IE_1 G \sim HE' G_m$ (голубые треугольники), и, значит,

IH , $E_1 E$ и GM пересекаются в одной точке.

Начав рассказ с упоминания энциклопедии Кимберлинга, ею и завершим: последнюю полученную точку – центр гомотетии голубых треугольников – мы можем обнаружить в этой энциклопедии под номером 226.