Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Стасенко, Радиоактивный распад, банковский процент и другие, *Квант*, 2018, номер 8, 30–31

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20180804>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 11:54:52

Радиоактивный распад, банковский процент и другие

А. СТАСЕНКО

КАК ИЗВЕСТНО, ЯДРА РАДИОАКТИВНО-го вещества рано или поздно распадаются с учетом всех законов физики – сохранения массы–энергии, импульса, момента импульса, суммарного электрического заряда, четности... На то они и радиоактивные. Но что значит «рано или поздно»? Для ответа на этот вопрос физиками введена специальная величина – период полураспада $\tau_{1/2}$. Уже сам индекс говорит о том, что за это время испытывает превращение половина ядер.

При этом физики записывают вполне разумное выражение того факта, что изменение количества ядер Δn за время Δt пропорционально их количеству до распада:

$$\Delta n = -\alpha n \Delta t. \quad (1)$$

Здесь α – коэффициент пропорциональности, имеющий размерность $1/c$, как легко видеть. А знак «минус» свидетельствует об уменьшении прежнего количества рассматриваемого вещества. Считается, что формулировка (1) закона радиоактивного распада принадлежит Фредерику Содди (1877–1956) и Эрнесту Резерфорду (1871–1937).

Решение уравнения (1) известно:

$$n = n_0 e^{-\alpha t}, \quad (2)$$

где $e = 2,73...$ – основание натуральных логарифмов, фундаментальная физико-математическая константа. Видно, что в течение отрезка времени $\frac{1}{\alpha} = \tau_e$ концентрация ядер уменьшается в e раз (см. рисунок). Легко установить связь между $\tau_{1/2}$ и τ_e :

$$\tau_e = \frac{\tau_{1/2}}{\ln 2} \approx \frac{\tau_{1/2}}{0,7}.$$

Ясно, что это величины одного порядка. Их значение изменяется от 10^{-9} до многих миллиардов лет – сравните с современным значением возраста Вселенной 13,7 миллиардов лет.

Интересно, что такой же зависимостью (1) описывается изменение денежного вклада в банк (на начальном этапе), только вместо «минус α » нужно поставить «плюс альфа», где α – теперь уже банковский процент (например, $\alpha = 10\% = 0,1$). Почему «на начальном этапе»? Потому, что существует время, за которое любой скромный вклад n_0 вырастает до значения, превышающего все богатства Земли, так что уравнение (1) нужно будет заблаговременно дополнить другими слагаемыми, описывающими обратную связь с обществом.

Еще более интересно, что такой же зависимостью (1) описывается и рост числа бактерий или амёб, размножающихся в стеклянной банке делением пополам. Опять же на начальном этапе – ибо объем банки не бесконечен.

Лет двести тому назад подобным фактом был встревожен английский ученый и священник Томас Роберт Мальтус (1766–1834). По его мнению, рост численности человечества должен описываться законом $n = n_0 e^{t/\tau}$, где τ есть характерное время порядка 25 лет – это время удвоения численности населения в идеальных условиях. А встревожило его то, что количество продуктов питания растет в арифметической прогрессии (т.е. пропорционально времени), а народонаселение – в геометрической прогрессии, и рано или поздно две соответствующие линии пересекутся (см. рисунок – кружок на штрих-пунктирной кривой) и наступит глобальный голод. Да и просто места на Земле может не хватить!

Дальше еще интереснее. Представим себе микрокапли, падающие в облаке и сливающиеся друг с другом. Их концентрация должна убывать по закону

$$\Delta n = -\beta n(n-1)\Delta t. \quad (3)$$

Множитель $(n-1)$ учитывает тот факт, что при $n=1$ $\Delta n=0$ – сливаться не с кем. (Это напоминает историю о встрече группы старых одноклассников, каждый из которых пожал руку другу. Если одноклассников было N , любой из них пожал $N-1$ рук,

исключая самого себя. И это произошло с каждым, поэтому общее число рукопожатий было $(N - 1) \cdot N = 99 \cdot 100 = 9,9 \cdot 10^3$.) Но при $n \gg 1$ получим $n(n - 1) = n^2$, что облегчает интегрирование уравнения (3):

$$\frac{n}{n_0} = \frac{1}{1 + n_0 \beta t}. \quad (4)$$

Видно, что с течением времени коагуляция капель падает и при $\tau_{1/2} = \frac{1}{n_0 \beta}$ увеличивается в два раза – процесс, обратный полураспаду ядер.

Очевидно, тем же выражением (3) можно описать уменьшение числа пауков в банке, пожирающих друг друга, или убыль числа автомобилей (если прекратить их выпуск) за счет парных столкновений. Или рост концентрации нейтральных частиц в плазме за счет рекомбинации – соединения электронов и положительных ионов:

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} \sim n_+ \cdot n_-.$$

Так как в квазинейтральной плазме концентрации частиц обоих знаков одинаковы: $n_+ = \frac{n}{2}$, $n_- = \frac{n}{2}$, или $\frac{\Delta n}{\Delta t} \sim n^2$, в решении (4) нужно лишь заменить знак β на противоположный.

А что же народонаселение? Конечно, эволюцию правильнее описывать уравнениями (3) и (4) (а не (1, 2)), в которых нужно не забыть изменить знак β . Но тогда в знаменателе выражения (4) появится знак «минус» и при стремлении времени к значению $\tau_* = \frac{1}{n_0 \beta}$ наступит то, что математики называют страшными словами «градиентная ка-

Качественное описание временной эволюции различных «сообществ»:

1 – закон радиоактивного распада или убыль вещества в химической реакции первого порядка;

2 – рост банковского вклада, числа делящихся бактерий или амёб, закон Мальтуса роста народонаселения;

3 – рост числа участников парного взаимодействия, химическая реакция второго порядка. Штрих-пунктирная линия – рост средств потребления, по Мальтусу

тастрофа»: значение $\frac{n}{n_0}$ устремляется к бесконечности еще резче, чем в законе Мальтуса!

Разумеется, в современной теоретической демографии в рассмотренных здесь уравнениях появляются дополнительные слагаемые, учитывающие многие факторы (обратное влияние истощения ресурсов, естественную смену поколений...).

Упомянем еще, что законы (1) и (3) используются и в физической химии для описания реакций первого, второго порядков. А еще... Но и сказанного достаточно, чтобы вспомнить вдохновляющие слова средневекового ученого о необозримости физики:

«К физике принадлежит учение о небесах, о стихиях (элементах) и их движении, о возникновении и уничтожении, о влиянии небес на погоду (метеорология), о минералах, растениях, животных, о душе и ее способностях. Медицина, астрология, учение о талисманах, алхимия, толкование снов и волшебства представляют собой разновидности прикладной физики» (В.В. Соколов. Средневековая философия. – М.: Высшая школа, 1979).

Не случайны и в гимне МФТИ такие слова: «Только в физике соль...»!