Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Бакаев, Обход многоугольника, *Квант*, 2020, номер 8, 27–31

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20200802>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 07:50:16

Обход многоугольника

Е. БАКАЕВ

В КОНКУРСЕ ИМЕНИ А. П. САВИНА в «Кванте» №12 за 2019 год предлагалось решить следующую задачу для некоторых конкретных значений n (автор задачи – А. Перепечко):

Барон Мюнхгаузен огородил свои владения забором в форме n -угольника. Он утверждает, что каждый внутренний угол этого n -угольника либо меньше 10° , либо больше 350° . Может ли барон быть прав? Решите задачу для а) $n = 10$; б) $n = 11$; в) $n = 101$.

Решим эту задачу для всех натуральных n . Будем называть углы многоугольника, меньшие 10° , *маленькими*, а большие 350° – *большими*. Итак, нас интересуют многоугольники, в которых a маленьких углов и b больших, $a + b = n$.

Четные n

Начнем с наименьших n . Понятно, что для $n = 3$ такого многоугольника не существует. Для $n = 4$ пример есть (рис.1, а). Еще порисовав многоугольники, можно додуматься, как устроена серия примеров для всех четных n (рис.1, б, в). Здесь и далее будем отмечать маленькие углы фиолетовым цветом, а углы, дополняющие большие углы до полного угла, – зеленым.

Упражнение 1. Докажите, что в шестиугольнике на рисунке 1, б выполняется равенство $\gamma = (\beta_1 + \beta_2) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$.

Рис. 1

Аналогично тому, как это получается в упражнении 1, в случае $(2k + 2)$ -угольника такой угол будет равен

$$\gamma = (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_k) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k+1}). \quad (1)$$

Это легко доказать с помощью теоремы о сумме углов n -угольника (которая гласит, что сумма углов любого n -угольника равна $180^\circ \cdot (n - 2)$). Либо же можно представить, что мы поворачиваем верхнюю сторону (точнее, луч – идущее вдоль стороны направление) на угол α_1 против часовой стрелки, потом на β_1 по часовой, потом на α_2 против часовой стрелки и т.д. (рис.2).

Рис. 2

В итоге верхняя сторона повернется на угол γ по часовой стрелке, отсюда и получаем равенство (1).

Упражнение 2. Придумайте примеры для $n = 6$ и $n = 8$ вида, отличного от показанного на рисунке 1.

Перестройка

Можно доказать существование примера, не предъявляя его явно: надо показать, как добавить к подходящему примеру две вершины так, чтобы снова получился подходящий. Тогда из подходящего примера

для $n = 4$ получится бесконечная цепочка примеров для всех четных n .

Возможна такая «перестройка» многоугольника: возьмем один из его маленьких углов и вырежем из него параллелограмм, как изображено на рисунке 3. Один ма-

Рис. 3

ленький угол превратится в два равных ему маленьких и один большой.

Упражнение 3. Придумайте другую «перестройку», добавляющую к многоугольнику две вершины.

Итак, для многоугольников с четным количеством сторон есть серия примеров. Осталось понять, при каких нечетных n существуют подходящие n -угольники. Рассмотрим среди всех таких n наименьшее, обозначим его M . Тогда для всех нечетных n , больших M , подходящий пример можно будет получить, нужное число раз повторив «перестройку» (также надо будет убедиться в наличии хотя бы одного маленького угла в исходном примере, чтобы «перестройку» можно было осуществить). Осталось найти M .

В приведенном выше рассуждении скрылась неточность: такого наименьшего n может и не существовать — если подходящих примеров для нечетных n нет вовсе. Но сейчас мы такой пример приведем.

Первый пример

Вернемся к конструкции на рисунке 2. При $\gamma = 180^\circ$ такой «четноугольник» превратится в «нечетноугольник» (рис. 4). Для

Рис. 4

какого наименьшего n устроенный таким образом пример существует? Сумма углов $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_k$ должна быть больше 180° , но все слагаемые в сумме меньше 10° , значит, их хотя бы 19. Тогда всего вершин не менее $19 + 20 = 39$.

Нетрудно понять, что нужные значения углов подобрать возможно. Итак, пример на $n = 39$ получен, а значит, $M \leq 39$.

Первая оценка

Некоторый пример получен, теперь давайте получим какую-нибудь оценку на количество сторон подходящего многоугольника. Снова будем рассматривать направления, но иначе. Начнем обход границы многоугольника против часовой стрелки и будем следить за тем, как меняется направление, в котором мы движемся.

Так как в подходящем многоугольнике каждый угол либо маленький, либо большой, то при переходе на очередную сторону направление, в котором мы движемся, меняется на *почти* противоположное. Затруднений с примером для четного n как раз и не возникает — при обходе направление меняется на *почти* противоположное четное количество раз и становится исходным. В случае же нечетного n нам потребуется оценить возможный вклад этих «почти».

Можно считать, что направлениям соответствуют лучи, выходящие из одной точки. На рисунках 5,а и 6,а показаны обходы многоугольников, а на рисунках 5,б и 6,б начала тех же лучей-направлений обхода перенесены в одну точку.

Будем следить за тем, на какой угол изменяется направление. Некоторые повороты происходят по часовой стрелке, некоторые — против часовой. Направление

Рис. 5

Рис. 6

против часовой стрелки будем считать положительным. Какое-то из направлений выбрано «нулевым», т.е. началом отсчета. Таким образом, направлению соответствует число (величина отклонения от начала отсчета) и при изменении направления число меняется.

При проходе через маленький угол α_i направление поворачивается на $(180^\circ - \alpha_i)$ против часовой стрелки (рис.7,а), т.е. увеличивается на $(180^\circ - \alpha_i)$. А при проходе

Рис. 7

через большой угол $(360^\circ - \beta_j)$ оно поворачивается на $(180^\circ - \beta_j)$ по часовой стрелке (рис.7,б), т.е. уменьшается на $(180^\circ - \beta_j)$. Тогда суммарное изменение направлений будет равно

$$\begin{aligned} S &= (180^\circ - \alpha_1) + (180^\circ - \alpha_2) + \dots + (180^\circ - \alpha_a) - \\ &\quad - (180^\circ - \beta_1) - (180^\circ - \beta_2) - \dots - (180^\circ - \beta_b) = \\ &= 180^\circ \cdot (a - b) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_a) + \\ &\quad + (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_b) = 180^\circ \cdot (a - b) - A + B, \quad (2) \end{aligned}$$

где через A обозначена сумма $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_a)$, через B — сумма $(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_b)$.

Так как путь замыкается, то после n поворотов направление станет таким же,

как было сначала, а значит, суммарное изменение направлений S должно быть кратно 360° . Кроме того, $a - b \neq 0$, поскольку $a + b$ нечетно. Тогда из равенства (2) получаем $|A - B| \geq 180^\circ$, значит, в сумме A или в сумме B хотя бы 19 слагаемых и $n \geq 19$. Соответственно, и $M \geq 19$.

Существует ли пример на 19?

Пока что между оценкой и примером имеется «зазор» от 19 до 39.

Существует ли пример с 19 вершинами? Если существует, то что про него можно понять из полученной нами оценки? В одной из сумм A и B должно быть 19 слагаемых, в другой ни одного. Значит, все повороты должны быть в одну сторону (пусть против часовой стрелки) и углы между соседними сторонами должны быть в среднем по $\frac{180^\circ}{19}$. Начнем рисовать такой многоугольник (рис.8).

Рис. 8

Кажется, что мы движемся «по спирали» и вряд ли получится такой многоугольник замкнуть...

В оценке мы пока что не использовали то, что это многоугольник; мы опирались только на то, что это замкнутая ломаная. Напомним разницу: граница многоугольника — это, по определению, замкнутая ломаная без самопересечений. Разрешив самопересечения, можно ли нарисовать подходящую замкнутую 19-звенную ломаную? Да, пример такой замкнутой ломаной привести нетрудно. Рассмотрим правильный 19-угольник. Между двумя его самыми длинными диагоналями, выходящими из одной вершины, угол $\frac{180^\circ}{19}$. Так

Рис. 9

что подходящую замкнутую 19-звенную ломаную можно нарисовать, обходя вершины правильного 19-угольника по этим диагоналям (рис.9).

Итак, при $n = 19$ пример для замкнутой ломаной нарисовать получилось, а для многоугольника — не вышло.

Вернемся к равенству (2). Угол $(180^\circ - \alpha_i)$ дополняет угол α_i до 180° , это смежный с ним угол, внешний угол многоугольника. Действительно, направление обхода изменяется как раз на величину этого внешнего угла. Это верно и для углов, больших 180° : если $\varphi > 180^\circ$, то угол величиной $(180^\circ - \varphi)$ по-прежнему можно назвать смежным с ним. Правда, его величина будет отрицательной, но отрицательные величины углов нам уже несколько привычны. На рисунке 10 серым цветом отмечены смежные углы к углу φ для двух случаев: $\varphi < 180^\circ$ и $\varphi > 180^\circ$. Так что S — это сумма внешних углов многоугольника. А у мно-

Рис. 10

гоугольников (как выпуклых, так и невыпуклых) она, как известно, *равна* 360° ! В точности равна, а не только кратна 360° , как это выходит для обычных замкнутых ломаных.

Тем самым получается, что направление обхода совершит *ровно один* оборот против часовой стрелки. Для выпуклых многоугольников это вполне очевидно (см. рис.5). Как раз рассмотрением такой картинки и можно доказать теорему о сумме внешних углов выпуклого многоугольника (т.е. тот факт, что она равна 360°). Правда, для невыпуклых многоугольников это утверждение уже совсем не очевидно, и проще доказать формулу суммы углов (внешних или внутренних) невыпуклого многоугольника иначе. Здесь мы не будем приводить это доказательство. С ним читатель может познакомиться, например, в статьях Н.Васильева и В.Гутенмахера «Сумма углов» и «О разрезаниях многоугольника и теореме Эйлера» в «Кванте» №2 за 1988 год.

Упражнения

- Найдите значение S для замкнутой ломаной на рисунке 9. Как зависит S от направления обхода ломаной?
- Приведите пример замкнутой самопересекающейся ломаной, для которой а) $S = 360^\circ$; б) $S = 0^\circ$.

Улучшаем оценку

Мы разобрались, что $S = 360^\circ$, а тогда из равенства (2) получаем $180^\circ \cdot (a - b - 2) = A - B$. Так как $0 < A < 10^\circ \cdot a$ и $0 < B < 10^\circ \cdot b$, то

$$-10^\circ \cdot b < 180^\circ \cdot (a - b - 2) < 10^\circ \cdot a.$$

Поскольку $n = a + b$ нечетно, то и $a - b$ нечетно. Разберем 4 случая, каким оно может быть:

- $a - b \geq 5$, тогда $180^\circ \cdot 3 < 10^\circ \cdot a$, т.е. $n \geq a \geq 55$;
- $a - b = 3$, тогда $180^\circ < 10^\circ \cdot a$, т.е. $a \geq 19$ и $b = a - 3 \geq 16$, значит, $n \geq 19 + 16 = 35$;
- $a - b = 1$, тогда $10^\circ \cdot b > 180^\circ$, т.е. $b \geq 19$ и $a = b + 1 \geq 20$, значит, $n \geq 19 + 20 = 39$;

• $a - b \leq -1$, тогда $10^\circ \cdot b > 180^\circ \cdot 3$, т.е. $n \geq b \geq 55$.

Итак, во всех случаях количество вершин не меньше 35: $M \geq 35$.

Получаем пример

Из оценки следует, что вариант $n = 35$ возможен лишь при $a = 19$, $b = 16$. Это помогает придумать пример: 4 подряд маленьких угла (в порядке обхода границы многоугольника), затем большой угол, затем снова маленький и так далее – маленькие углы чередуются с большими (рис.11).

Рис. 11

Осталось показать, что устроенный таким образом пример действительно существует и нам не мешают какие-нибудь противоречия, на которые мы еще не обратили внимания.

Построение примера можно описать так. Возьмем треугольник, два угла которого меньше 10° , а третий – меньше 170° (например: 9° , 9° , 162°). Большой его угол разрежем еще на 17 маленьких углов (на рисунке 12 их 8). Получится замкнутая ломаная, у которой часть звеньев друг на друга накладываются. В нем 19 маленьких углов и 16 углов в 360° (на рисунке они отмечены красным). Осталось последовательно подвигать вершины, чтобы стороны перестали накладываться друг на друга, но при этом маленькие углы остались маленькими. Таким образом будет получен искомый многоугольник.

Итак, $M = 35$. Задача решена.

Рис. 12

Напоследок приведем еще две интересные задачи на затронутые темы.

Дополнительные задачи

1 (В.Произволов, «Задачи на вырост»). Каждый из углов 19-угольника кратен 10° . Докажите, что у него найдутся две параллельные стороны.

2. Какое наибольшее количество острых углов может быть а) в выпуклом, б) в произвольном n -угольнике?

БИБЛИО-ГЛОБУС
ВАШ ГЛАВНЫЙ КНИЖНЫЙ

МЫ ПРЕДЛАГАЕМ
БОЛЬШОЙ ВЫБОР ТОВАРОВ И УСЛУГ

УСЛУГИ	АССОРТИМЕНТ
■ Интернет-магазин www.bgshop.ru	■ Книги
■ Кафе	■ Аудиокниги
■ Клубные (дисконтные) карты и акции	■ Антиквариат и предметы коллекционирования
■ Подарочные карты	■ Фильмы, музыка, игры, софт
■ Предварительные заказы на книги	■ Канцелярские и офисные товары
■ Встречи с авторами	■ Цветы
■ Читательские клубы по интересам	■ Сувениры
■ Индивидуальное обслуживание	
■ Подарочная упаковка	
■ Доставка книг из-за рубежа	
■ Выставки-продажи	

г. Москва,
м. Лубянка,
м. Китай-город
ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1
8 (495) 781-19-00
www.biblio-globus.ru
пн – пт 9:00 - 22:00
сб – вс 10:00 - 21:00
без перерыва на обед