Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Кноп, Шесть перпендикуляров, *Квант*, 2020, номер 9, 25–27

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20200903>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 18:18:03

Шесть перпендикуляров

К. КНОП

Эта статья посвящена простейшей геометрической задаче на построение – настолько простой, что многие и задачей-то ее не считают.

Задача 1. Даны две точки A и B . Как с помощью циркуля и линейки провести через A прямую, перпендикулярную AB ?

Казалось бы, в чем тут может быть сложность? Решение же очевидно.

Способ 1. Школьный

Проводим с помощью линейки прямую AB , а с помощью циркуля находим на ней точку C , симметричную B относительно A .

Теперь нам нужно всего лишь построить серединный перпендикуляр к отрезку BC – это делается еще двумя окружностями и одной прямой (окружности с центрами C и B и прямая DE на рисунке 1).

Да, все правильно. Но нельзя ли побыстрее? Ведь нам потребовались для

этого простого построения целых пять линий. А не хватит ли четырех?

И вот тут начинаются маленькие геометрические открытия. Безусловно, четырех линий хватает, причем по-разному.

Способ 2. Используем произвольную точку

Если провести (первой линией) прямую AB , то перпендикуляр к ней можно постро-

Рис. 2

ить четвертой (а не пятой) линией, если использовать знаменитое свойство окружности: все углы, опирающиеся на диаметр, прямые. Проводим через точку A окружность с произвольным центром C , как показано на рисунке 2 (вторая линия). Пусть она вторично пересечет AB в точке D . Если теперь (третья линия) провести через точку C диаметр DE , то прямая AE (четвертая линия) будет искомым перпендикуляром. Не правда ли, красиво и естественно?

Способ 3. Сведем задачу к построению касательной

Если провести через A окружность с центром B (первая линия), то искомая

прямая должна быть касательной к этой окружности (рис.3). Чтобы построить эту касательную, возьмем произвольную точку C на окружности и проведем (вторая линия) окружность с центром C и радиусом CA . Пусть D – вторая точка пересечения окружностей. Тогда проведем (третья линия) окружность с центром A через точку D . В пересечении второй и третьей окружностей получаем точку E . Прямая AE – искомая.

Рис. 3

Упражнение. Докажите, что AE – касательная к окружности с центром B и радиусом BA .

Теперь рассмотрим небольшую вариацию нашей задачи.

Задача 2. Даны две точки A и B , лежащие на одной окружности. Центр окружности неизвестен. Как с помощью циркуля и линейки провести через A прямую, перпендикулярную хорде AB ?

Казалось бы, чем помогает какая-то посторонняя окружность? Если бы ее центр был дан, то построение перпендикуляра было бы очевидным (см., например, линии 3 и 4 в способе 2). А поскольку центра в нашем распоряжении нет, то остается только игнорировать эту окружность. Так ведь?

Нет, не так! Парадоксально, но наличие даже «посторонней» окружности дает новые варианты построения перпендикулярной прямой.

Способ 4. Вписанный четырехугольник

Данная в условии окружность нарисована синим цветом (рис.4). Проведем прямую AB , а также окружность с центром A через точку B . Пусть E – точка пересечения этих прямой и окружности (т.е. точка, симметричная B относительно A), а D – точка пересечения двух окружностей.

Рис. 4

Тогда третья линия – прямая DE ; пусть F – точка ее пересечения с данной окружностью. Прямая AF – искомая.

Доказательство. Четырехугольник $ABDF$ – вписанный, поэтому сумма противоположных углов равна 180° . Так как $\angle BDE$ опирается на диаметр BE , то он прямой. Следовательно, $\angle BAF$ тоже прямой.

Способ 5. Произвольная окружность плюс две прямые

Как и в предыдущем способе, мы хотели бы построить точку F , диаметрально противоположную B в данной синей окружности. Но делать это будем совсем иначе.

Первый шаг – возьмем произвольный центр C и проведем окружность радиусом CB (рис.5). Если D – вторая точка ее пересечения с данной окружностью, а E – второй конец диаметра BC , то прямая DE пересечет синюю окружность в нужной

Рис. 5

точке F . Это напрямую следует из того, что угол BDE опирается на диаметр BE , а значит, является прямым. Следовательно, угол BDF также прямой, а так как вписанный угол BAF опирается на ту же дугу, то и он прямой.

Способ 6. Две окружности и одна прямая

Опять начинаем с произвольного центра окружности, но саму окружность проведем через точку A (рис.6). Пусть D – вторая точка ее пересечения с данной (синей) окружностью. Теперь строим (вторая линия) окружность с центром B радиусом BD . Эта окружность пересечет две предыдущие окружности в точках E и F . Тогда прямая EF пересекает первую из построенных нами окружностей в такой точке G , для которой угол GAB – прямой.

Рис. 6

Докажем, что в данной конструкции действительно $\angle GAB = 90^\circ$. В этом состоит утверждение задачи М2606.

М2606. Три окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ проходят через одну точку D и пересекаются вторично в точках A, E, F , как показано на рисунке 7. Известно, что ω_3

Рис. 7

проходит через центр B окружности ω_2 . Прямая EF вторично пересекает ω_1 в точке G . Докажите, что $\angle GAB = 90^\circ$.

Доказательство. Пусть GA пересекает вторично ω_3 в точке H (рис. 8). Тогда $\angle HED = \angle DAG = \angle DFG$, значит, $\angle EFD = 180^\circ - \angle HED$, что означает касание прямой HE и окружности ω_2 . Следовательно, $\angle HEB = 90^\circ$, откуда $\angle HAB = 90^\circ$, что нам и нужно.

Рис. 8

Рис. 9

Отметим, что в приведенном решении $E-G-H-E$ является частным случаем замкнутой траектории через попарные точки пересечения окружностей, проходящих через одну точку (рис. 9).

Вниманию наших читателей

Начиная с 2017 года журнал «Квант» стал ежемесячным и в год выходит 12 номеров журнала.

Подписаться на наш журнал можно с любого номера в любом почтовом отделении. Наш подписной индекс в каталоге «Пресса России» – 90964.

Купить журнал «Квант» возможно в магазине «Математическая книга» издательства МЦНМО (адрес интернет-магазина: biblio.mcsme.ru), а также в московских книжных магазинах «Библио-глобус», «Молодая гвардия», «Московский дом книги» и в редакции журнала.

Архив вышедших номеров журнала «Квант» имеется на сайте <http://kvant.ras.ru>