Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Разборов, Чувствительность булевых функций, *Квант*,
2020, номер 10, 7–16

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20201002>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 16:16:39

Чувствительность булевых функций

А. РАЗБОРОВ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ РАССКАЖЕМ о красивой и важной задаче с вполне элементарной формулировкой, которая была предметом интенсивных исследований многих математиков (включая автора этой статьи) на протяжении нескольких десятилетий и при этом не поддавалась никаким усилиям. А дальше все произошло как в сказке: 1 июля 2019 года на сайте arxiv.org появилась шестистраничная работа [1] американского математика по имени Хао Хуан (Hao Huang) с полным решением проблемы совершенно неожиданным и удивительно простым способом.

Начнем с азов.

Булевы функции, раскраски гиперкуба и чувствительность. Через $\{0, 1\}^n$ мы будем обозначать множество всех двоичных слов длины n : например, $\{0, 1\}^3$ состоит из восьми элементов (000), (001), (010), (011), (100), (101), (110), (111). Булева функция от n переменных $f_n : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ классифицирует слова $x \in \{0, 1\}^n$ в «хорошие» (те, для которых $f_n(x) = 1$) и «плохие» ($f_n(x) = 0$). Нижний индекс всегда будет обозначать число переменных.

Булевы функции, как, впрочем, и любые другие, можно подставлять друг в друга; не менее важно то, что их можно подвергать логическим операциям, таким как И, ИЛИ, НЕ. Поэтому булевы функции являются одним из наиболее фундаментальных и часто встречающихся объектов в различных компьютерных науках (и теоретических, и прикладных) как способ

представления и преобразования дискретной информации.

Нас сегодня будут больше интересовать свойства булевых функций как комбинаторных объектов, а также иногда их аналитические¹ свойства; изучением последних занимается целая дисциплина, называемая «анализ булевых функций». Поэтому, чтобы подчеркнуть комбинаторную и геометрическую природу булевых функций, давайте по возможности вместо формул рассматривать картинки и графы.

Два слова $x, y \in \{0, 1\}^n$ называются *соседними*, если они отличаются ровно в одной позиции $i \in \{1, \dots, n\}$. Соединяя ребром все пары соседних вершин, получим граф Q_n на 2^n вершинах. Эти графы (на рисунке 1 показаны графы Q_1 , Q_2 и Q_3) называются

Рис. 1

гиперкубами, и они очень важны в комбинаторике по многим разным причинам. Тем самым булевы функции $f_n : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ превращаются в раскраски множества вершин $V(Q_n)$ n -мерного гиперкуба в два цвета: зеленый ($f_n(x) = 1$) и красный

¹ Здесь стоит напомнить, что 1 и 0 могут рассматриваться не только как логические константы ИСТИНА и ЛОЖЬ, но и просто как вещественные числа.

Рис. 2

является центральным для нашей статьи понятием.

Упражнение 1. Функция f_n существенно зависит от всех своих переменных, если она не может быть выражена как функция от меньшего числа переменных. На нашей картинке это означает, что в ее разрезе имеется хотя бы одно ребро в каждом из n возможных направлений. Функция f_n обобщенно симметрична, если ее картинку можно повернуть таким образом, что цвет вершины будет зависеть только от ее уровня, т.е. от количества единиц в соответствующем двоичном слове (рис.3).

Докажите, что всякая функция f_2 , существенно зависящая от обеих своих переменных, является обобщенно-симметричной. А верно ли то же самое для функций от 3 и большего числа переменных?

Мы теперь готовы определить важную числовую характеристику булевой функции f_n – ее чувствительность $s(f_n)$. Начнем с чувствительности $s(f_n, x)$ функции f_n в данной вершине $x \in V(Q_n)$: по определе-

($f_n(x) = 0$). На рисунке 2 показаны булевы функции, соответствующие наиболее базисным операциям: И, ИЛИ, сложение по модулю 2 (XOR) и функция голосования (MAJ_3 ; значение $\text{MAJ}_3(x)$ равно 1, если и только если слово x содержит хотя бы две единицы). На каждом рисунке также выделено синим цветом множество $\text{Cut}(f_n)$ ребер графа Q_n , вершины которых покрашены в разные цвета. Это множество называется *разрезом* (данной функции), и оно

Рис. 3

нию, она просто равна числу ребер в разрезе $\text{Cut}(f_n)$, выходящих из x . Это одна из нескольких естественных возможностей измерять, насколько именно функция в точке x чувствительна к малым (в данном случае – ровно в одной координате) изменениям во входных данных. Чувствительность функции f_n определяется как максимально возможное значение $s(f_n, x)$:

$$s(f_n) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x \in V(Q_n)} s(f_n, x). \quad (1)$$

Таким образом (для знакомых с терминологией теории графов), $s(f_n)$ – это не что иное, как максимальная степень (вершины) графа с множеством ребер $\text{Cut}(f_n)$.

Упражнения

2. Вычислите $s(f_3)$ для всех функций на рисунке 1.

3. Докажите, что при $n \geq 2$ для любой функции f_n , существенно зависящей от всех своих переменных, имеет место $s(f_n) \geq 2$.

Для больших n имеет место оценка

$$s(f_n) \geq \frac{1}{2} \log_2 n - \frac{1}{2} \log_2 \log_2 n + \frac{1}{2}, \quad (2)$$

где, как и в упражнении 3, функция f_n существенно зависит от всех своих переменных. Эта оценка, доказанная Х.У.Симоном (H.U.Simon) в 1983 году, по-видимому, является первым нетривиальным результатом в исследовании чувствительности булевых функций. На первый взгляд она может показаться чрезмерно грубой, но на самом деле оценка довольно точна.

Упражнение 4. Для всех $h \geq 1$ постройте пример функции f_{h+2^h} , существенно зависящей от $h + 2^h$ переменных $s(f_{h+2^h}) = h + 1$.

Блочная чувствительность. Понятие чувствительности очень простое и естественное, но оказывается, что большую пользу в различных приложениях приносят его модификации.

Так, например, в формуле (1) вместо взятия максимума по всем $x \in V(Q_n)$ можно взять среднее значение. Получится *средняя чувствительность* $as(f_n)$ функции f_n , которая, как легко понять, является не чем иным, как размером разреза $|Cut(f_n)|$, нормированным подходящим (вычислите его!) множителем. Это понятие играет центральную роль в анализе булевых функций.

Нас сегодня, однако, больше интересует другая модификация: $bs(f_n)$, называемая *блочной чувствительностью*. Как и раньше, начнем со случая, когда у нас есть функция f_n и входное слово $x \in \{0, 1\}^n$. Тогда *чувствительным блоком* называется подмножество $B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ такое, что $f(x^B) \neq f(x)$, где x^B — результат изменения слова x одновременно во всех позициях $i \in B$. Например, функция MAJ_3 на рисунке 1 в точке (000) имеет четыре чувствительных блока, а именно, те подмножества $B \subseteq \{1, 2, 3\}$, для которых $|B| \geq 2$. *Блочной чувствительностью* $bs(f_n, x)$ функции f_n на входе² x называется максимальное значение l , для которого существуют l **попарно непересекающихся** чувствительных блоков. Таким образом, $bs(MAJ_3, 000) = 1$ просто потому, что любые два чувствительных блока имеют непустое пересечение. И, наконец, как и раньше, полагаем

$$bs(f_n) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x \in V(Q_n)} bs(f_n, x).$$

Упражнение 5. Вычислите $bs(f_3)$ для всех функций на рисунке 1.

Ниже мы объясним, почему блочная чувствительность важна и интересна, но

² Термин «вход» будет иногда использоваться в дальнейшем в качестве сокращения для «входное слово $x \in \{0, 1\}^n$ ».

вначале давайте сравним ее с обыкновенной, а также сформулируем гипотезу (уже доказанную), которая послужила поводом для написания этой статьи.

Прежде всего, обыкновенная чувствительность, очевидно, соответствует ограничению, состоящему в том, что все чувствительные блоки имеют размер 1. Поэтому $s(f_n, x) \leq bs(f_n, x)$ и, соответственно, $s(f_n) \leq bs(f_n)$.

Упражнения

6. Найдите ошибку в следующем рассуждении.

Докажем, что $s(f_n)$ всегда равно $bs(f_n)$. Пусть $bs(f_n) = s$. Рассмотрим соответствующий вход x и систему из s чувствительных блоков на этом входе. Так как ограничение нашей функции на любой блок нетривиально, в каждом блоке существует некоторый вход, на котором функция чувствительна по крайней мере в одной позиции. Так как блоки попарно не пересекаются, эти входы можно между собой соединить и получить вход для исходной функции, чувствительный по крайней мере к s переменным, по одной в каждом блоке. Следовательно, $s(f_n) \geq s$.

7*. Постройте функцию f_4 , у которой $s(f_4) = 2$ и $bs(f_4) = 3$.

Насколько большим может быть разрыв между $s(f_n)$ и $bs(f_n)$? Первый общий пример в этом направлении принадлежит Рубинштейну (Rubinstein, 1995). Соответствующую функцию R_n от $n = m^2$ переменных описать довольно легко, но лучше это делать не на картинке. Итак, у нас есть двоичное слово x длины m^2 . Первым делом разобьем его на m блоков по m знаков в каждом блоке. Назовем блок *хорошим*, если он содержит ровно две единицы, причем эти единицы следуют друг за другом. Раскрасим x в зеленый цвет, если в нем найдется хотя бы один хороший блок, и в красный, если такого нет.

Упражнение 8. Докажите, что $s(R_{m^2}) = m$, а $bs(R_{m^2}) = m^2/2$.

Итак, разрыв между чувствительностью и блочной чувствительностью может выражаться квадратичной функцией, и попытки его увеличить оставались совершенно безуспешными в течение долгого времени. Улучшить мультипликативную константу в примере Рубинштейна удалось лишь совсем недавно, но функция при этом так

и осталась квадратичной. Все это побудило Нисан и Сегеди (Nisan и Szegedy) сформулировать в 1994 году следующую гипотезу, быстро завоевавшую широкую известность.

Гипотеза о блочной чувствительности.

Существуют такие абсолютные константы $\epsilon, \delta > 0$, что для любой булевой функции f_n имеет место $s(f_n) \geq \delta \cdot \text{bs}(f_n)^\epsilon$.

Если эту гипотезу сформулировать словами, то в ней утверждается, что функции $s(f_n)$ и $\text{bs}(f_n)$ совпадают «с точностью до некоторого полинома (многочлена)». Такой уровень точности, в особенности когда полиномиальные функции противопоставляются экспоненциальным, является типичным для современной теории сложности; более подробно об этом можно прочитать в популярном очерке [2].

Достигнутый в течение 25 лет прогресс в доказательстве этого утверждения (или построении к нему контрпримера) преимущественно сводился к нахождению новых гипотез или фактов, напрямую с ним связанных. Приятным исключением является работа Кеньон и Кутина (Kenyon и Kutin) 2004 года, в которой гипотеза о блочной чувствительности доказана в предположении, что все чувствительные блоки имеют ограниченный (например, ≤ 10) размер. Мы отсылаем заинтересованного читателя к обзору [3], а сами переходим непосредственно к доказанному Хуаном результату.

Теорема 1 ([1]). Для всякой булевой функции f_n имеем $s(f_n) \geq \text{bs}(f_n)^{1/4}$.

Прежде чем рассказывать об идеях доказательства, давайте выполним данное выше обещание и поговорим о том, почему именно блочная чувствительность важна и интересна. Оказывается, что она «с точностью до полинома» эквивалентна целому ряду других важных характеристик булевых функций. Более того, если читать соответствующие доказательства (до чего мы, к сожалению, не дойдем), то видно, что блочная чувствительность занимает в них центральное место. Мы рассмотрим три такие характеристики, имеющие раз-

личную природу: комбинаторную, вычислительную и аналитическую.

Сертификационная сложность. Как всегда, начнем с рассмотрения индивидуального входа $x \in \{0, 1\}^n$. Множество позиций $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ называется *сертифицирующим* (для данного x), если набор значений $(x_i | i \in I)$ (называемый *сертификатом*) полностью определяет $f_n(x)$. Иными словами, для любого другого $y \in \{0, 1\}^n$, совпадающего с x во всех позициях из I , имеет место $f_n(y) = f_n(x)$. Сертификаты далеко не единственны, и *сертификационной сложностью* $C(f_n, x)$ называется **минимальный** (обратите внимание на отличие от определений чувствительности, в которых берется максимум) возможный размер $|I|$ сертификата I . После этого, как и раньше,

$$C(f_n) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x \in \{0, 1\}^n} C(f_n, x).$$

То же самое понятие легко объяснить геометрически. Рассмотрим семейство подкубов в Q_n , имеющих коразмерность d (т.е. содержащих ровно 2^{n-d} вершин). Среди них нас интересуют *монохроматические* подкубы, т.е. такие, у которых все вершины покрашены в один и тот же цвет.

Упражнение 9. Докажите, что $C(f_n)$ равно минимальному d , для которого монохроматические подкубы коразмерности d полностью покрывают $\{0, 1\}^n$.

Легко понять, что $\text{bs}(f_n, x) \leq C(f_n, x)$ и, следовательно, $\text{bs}(f_n) \leq C(f_n)$. Действительно, выберем произвольный сертификат I с $|I| = C(f_n, x)$. Тогда всякий чувствительный блок B на входе x обязан содержать хотя бы один $i \in I$. Поэтому всякое **дизъюнктное** семейство чувствительных блоков (т.е. такое, что никакие два его блока не пересекаются) может содержать не более $|I|$ членов.

В другую сторону это намного менее очевидно.

Теорема 2 (Нисан, Сегеди, 1994). Для всякой булевой функции f_n имеем $C(f_n) \leq \text{bs}(f_n)^2$.

Таким образом, $\text{bs}(f_n)$ и $C(f_n)$ «эквивалентны с точностью до полинома», и при желании в теореме 1 можно заменить блоч-

ную чувствительность на сертификационную сложность. От этого ее содержание (за исключением, возможно, константы в экспоненте) не изменится. Отметим также, что в геометрическом определении $C(f_n)$ можно дополнительно потребовать, чтобы искомое покрытие было на самом деле **разбиением**, т.е. все участвующие в покрытии подкубы попарно не пересекаются. Полученная величина все еще будет полиномиально эквивалентна $bs(f_n)$ и $C(f_n)$; почему это так, станет понятным в следующем разделе.

Разрешающие деревья. До сих пор мы в основном занимались комбинаторными и к тому же локальными (т.е. определяемыми в терминах некоторой «окрестности» фиксированной вершины $x \in \{0, 1\}^n$) свойствами булевых функций. В этом разделе мы покажем, как все это соотносится с теорией *вычислительной* сложности.

Разрешающие деревья (decision trees) – это, пожалуй, наиболее простая, но в то же время наиболее часто используемая в приложениях вычислительная модель. Многие, вероятно, знают игру в 20 вопросов, в которой требуется угадать неизвестный предмет, задавая про него вопросы, на которые допускаются лишь ответы ДА/НЕТ. Любую мыслимую стратегию для этой игры можно представить в виде *разрешающего дерева* (рис.4). Его *высотой* называется *максимальная* возможная длина пути в этом дереве. Таким образом, высота дерева определяется числом вопросов, задаваемых в наиболее неблагоприятном (наихудшем) для нас случае. Напри-

мер, если на рисунке 4 нам повезло и был загадан именно стол, то все равно высота дерева будет измеряться подсчетом длины вдоль других ветвей этого дерева.

Читателю предлагается обдумать следующий довольно нехитрый тезис: игру в 20 вопросов можно *заведомо* выиграть тогда и только тогда, когда для нее существует разрешающее дерево, имеющее высоту ≤ 20 .

Как мы уже отмечали, разрешающие деревья в той или иной форме используются везде, и во многих приложениях достаточно рассматривать вычисление с их помощью булевых функций f_n . Чтобы разобраться в том, что это такое, давайте слегка модифицируем правила игры: предположим, что вместо предмета у нас загадано двоичное слово $x \in \{0, 1\}^n$. Тогда если ставится задача угадать x полностью, то легко понять, что никакое разрешающее дерево для решения этой задачи не может иметь высоту $\leq n - 1$.

Упражнение 10. Докажите это утверждение.

Предположим, однако, что все слово x нас не интересует, а интересует некоторое его свойство, задаваемое булевой функцией $f_n(x)$. В такой постановке задача не слишком интересна, потому что про заглаванное свойство можно просто спросить. Однако в рассматриваемой нами модели мы разрешаем угадывающему задавать только очень простые вопросы, а именно выяснять значение индивидуального бита x_i ($i \in \{1, \dots, n\}$) в слове x . Пример такого разрешающего дерева приведен на рисунке 5; требуется, чтобы информации, полученной угадывающим вдоль каждой ветви, было достаточно для определения зна-

Рис. 4

Рис. 5

чения $f_n(x)$ независимо от тех значений, про которые не спрашивали. *Сложность* $D(f_n)$ булевой функции f_n по отношению к разрешающим деревьям (query complexity) определяется как минимально возможная высота разрешающего дерева, вычисляющего нашу функцию. Иными словами, это наименьшее число простых вопросов про вход $x \in \{0, 1\}^n$, которых **заведомо** достаточно для вычисления значения $f_n(x)$.

Упражнения

11. Определите $D(f_3)$ для всех функций, изображенных на рисунке 2.

12. Докажите, что $D(f_n) = D(\neg f_n)$, где $\neg f_n$ — отрицание функции f_n .

13. Докажите, что $D(f_n) = D(f_n(\neg x_1, \dots, \neg x_n))$.

14. Докажите, что $D(f_n \vee g_n) \leq D(f_n) + D(g_n)$. Может ли это неравенство быть строгим?

Теперь давайте свяжем все это с предыдущими рассуждениями. Как всегда, в одну сторону это просто. Если имеется разрешающее дерево, то каждой заключительной вершине соответствует сертификат, состоящий из ответов на все вопросы, которые угадывающий спросил про x по дороге в эту вершину. На рисунке 5 этот сертификат выписан явно для одной (закрашенной) вершины. Размер этого сертификата не превосходит высоты дерева, и более того, каждый вход x обладает ровно одним таким сертификатом. Таким образом, $C(f_n) \leq D(f_n)$ и, более того (сравните с замечанием в конце предыдущего раздела), построенная нами система подкубов является *разбиением* $\{0, 1\}^n$.

В обратную сторону это намного менее очевидно.

Теорема 3 (Билз и др., 2001). Для всякой булевой функции f_n имеем $D(f_n) \leq C(f_n) \leq \text{bs}(f_n)$ (что $\leq \text{bs}(f_n)^3$ ввиду теоремы 2).

Доказательство этой теоремы выходит за рамки этой статьи, но она позволяет добавить разрешающие деревья к списку мер сложности, полиномиально эквивалентных блочной чувствительности. Отметим лишь одно ее замечательное свойство: величины $C(f_n)$, $\text{bs}(f_n)$ в правой части имеют сугубо

комбинаторную (или геометрическую, если угодно) природу. В то же время разрешающие деревья — это концепция алгоритмическая. Таким образом, теорема 3 утверждает существование алгоритма, качество работы которого целиком определяется комбинаторными свойствами функции, к которой он применяется.

Булевы функции и полиномы. В этом разделе мы рассматриваем 0 и 1 просто как вещественные числа, совершенно абстрагируясь от их логического смысла. Кроме того, нас будет интересовать слегка более общая ситуация $f_n : \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$, т.е. областью определения функции f_n все еще служат вершины гиперкуба, но значениями могут быть уже произвольные вещественные числа.

Мы хотим представить функции f_n максимально простым выражением, причем под «представлением» мы имеем в виду, что значение нашего выражения должно совпадать с f_n там, где эта функция определена (т.е. при $x \in \{0, 1\}^n$), и может вести себя произвольно на всех остальных.

Самые простые и важные аналитические выражения — это полиномы (многочлены) от нескольких переменных, и оказывается, что в самом деле любая функция $f_n : \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$ допускает полиномиальное представление. Более того, в таком представлении нет нужды в высших (≥ 2) степенях одной и той же переменной: так как $x_i \in \{0, 1\}$, то x_i^d при $d \geq 2$ всегда можно упростить до x_i . Иными словами, достаточно ограничиться *мультилинейными полиномами*, т.е. такими, у которых степень по каждой переменной не превосходит 1 (и, следовательно, суммарная степень не превосходит n).

Упражнение 15. Докажите это утверждение.

Указание. Напишите явную формулу, связывающую $f_n(x_1, \dots, x_n)$ с $f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ и $f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 1)$.

Оказывается, что такое представление к тому же и единственно. Таким образом, всякую функцию $f_n : \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (и, в частности, всякую булеву функцию) можно отождествить с ее мультилинейным полиномиальным представлением.

Упражнение 16. Представьте в виде мультилинейных полиномов все функции на рисунке 2.

Таким образом, с каждой булевой функцией f_n можно связать еще одну меру сложности, на этот раз алгебраическую, а именно степень $\deg(f_n)$ представляющего ее мультилинейного полинома. Отметим ее важное отличие от всех ранее рассмотренных мер. А именно, до сих пор в наши определения входили разнообразные минимумы и максимумы, что на практике ведет к тому, что вычислить их, или даже приблизить разумным образом, может быть непросто. Напротив, степень $\deg(f_n)$ соответствует *единственному* представлению функции f_n , и, как следствие, ее можно вычислить явно в большинстве интересных ситуаций, просто выписав представляющий полином.

Видимо, читатель уже догадался, к чему мы ведем: степень $\deg(f_n)$ оказывается эквивалентной всем ранее рассмотренным мерам. Доказать неравенство в одну сторону довольно легко.

Упражнение 17. Докажите, что $\deg(f_n) \leq D(f_n)$.

В другую сторону дело представляется довольно затруднительным: все, что у нас есть – это мультилинейный полином малой степени и заверения в том, что если мы в него подставим 0 или 1, то в результате снова получится 0 или 1. Нам же надо каким-то образом из этого установить, что полученная таким образом булева функция имеет вполне определенную и притом довольно жесткую структуру. На помощь приходит блочная чувствительность: доказывается, что

$$\deg(f_n) \geq \frac{1}{3} \sqrt{\text{bs}(f_n)}. \quad (3)$$

Доказательство весьма нетривиально и использует глубокий факт из теории полиномиальной аппроксимации. Грубо говоря, основная идея состоит в том, что $\text{bs}(f_n) \geq s$ – это утверждение *позитивное*, именно этим блочная чувствительность и удобна. Оно означает *существование* входа x и блоков $B_1, \dots, B_s$ с определенными свойствами. Показывается, что наличие таких $x, B_1, \dots, B_s$ несовместимо с наличием полиномиального представления малой степени.

В заключение этого раздела отметим, что другой важной характеристикой булевой функции, в особенности при рассмотрении вероятностных и квантовых алгоритмов, является ее *приближенная степень* $\widetilde{\deg}(f_n)$. Она определяется как минимальная возможная степень мультилинейного полинома $p_n(x_1, \dots, x_n)$, для которого $|p_n(x_1, \dots, x_n) - f_n(x_1, \dots, x_n)| \leq 1/3$ для всех $x \in \{0, 1\}^n$ (точное значение константы $1/3$ здесь большой роли не играет, важно лишь, что она меньше $1/2$). В этом определении уже присутствует минимум, поэтому приближенная степень – намного более сложная величина, чем обыкновенная. Скажем, даже для простой функции на рисунке 6 до-

Рис. 6

казательство того, что ее приближенная степень **линейна** по n , потребовало многих лет работы и было получено сравнительно недавно специально разработанным для этой цели методом (Бун, Талер (Bun, Thaler), 2013; Шерстов, 2014).

Однако если мы работаем «с точностью до полинома», то приближенная степень пополняет нашу коллекцию мер, полиномиально эквивалентных блочной чувствительности. Неравенство $\widetilde{\deg}(f_n) \leq \deg(f_n)$ очевидно, а метод, используемый для доказательства нижней оценки (3) на степень, с тем же успехом работает и для приближенной степени.

Мы познакомились с некоторыми базовыми мерами сложности булевых функций. Несмотря на то, что они имеют совсем разную природу, все они эквивалентны друг другу в некотором разумном смысле, кроме (до 2019 года!) обыкновенной чувствительности. Осталось сказать несколько слов о доказательстве Хуана, лишаящем обыкновенную чувствительность ее особого статуса.

Блочная чувствительность полиномиально эквивалентна чувствительности. Доказательство из [1] существенно опирается на предыдущую работу Готсмана и Линиала (1997), в которой предложена еще одна характеристика блочной чувствительности, и мы начнем с этой работы, тем более что эта часть почти элементарна.

Отправной точкой для нас служит булева функция f_n с $\deg(f_n) = d$, а в конце будет показано, что $s(f_n) \geq d^{1/2}$.

Первое наблюдение состоит в том, что без ограничения общности можно считать $d = n$. Для этого достаточно в представляющем f_n полиноме выделить произвольный член старшей степени, скажем $\alpha x_1 x_2 \dots x_d$ (где $\alpha \neq 0$). Подставим вместо оставшихся переменных $x_{d+1}, \dots, x_n$ произвольные 0–1 значения (например, нули). Легко понять, что от такой операции степень полинома уменьшиться не может, просто потому что член $\alpha x_1 \dots x_d$ мы не трогаем и сокращаться ему будет не с кем. С другой стороны, чувствительность (как, впрочем, и все остальные рассмотренные в этой статье меры) от такой подстановки может только уменьшиться.

Упражнение 18. Докажите это утверждение.

Итак, предположим, что старший член $x_1 x_2 \dots x_n$ присутствует в f_n с ненулевым коэффициентом α . Оказывается, что α имеет очень полезное комбинаторное описание. Развернем наш гиперкуб, чтобы на каждом горизонтальном уровне оказались входы с одинаковым количеством единиц, и поменяем цвет вершин с красного на зеленый и наоборот, но **только на нечетных уровнях** (рис.7).

Рис. 7

Что произойдет от такой операции? В первых, разрез $\text{Cut}(f_n)$ превратится в множество монохроматических ребер, т.е. таких, у которых оба конца покрашены в *один* цвет. Тем самым, если мы рассмотрим подграфы G_n, R_n , индуцированные зелеными и красными (в новой раскраске!) вершинами соответственно, то $s(f_n)$ станет не чем иным, как $\max(\Delta(G_n), \Delta(R_n))$, где $\Delta(G)$ – максимальная степень вершины в графе G .

Оказывается, что коэффициент α просто измеряет «несбалансированность» нашей новой раскраски. Более точно, если $g_n = |V(G_n)|$ и $r_n = |V(R_n)|$ – количества «новых» зеленых и красных вершин, то имеет место соотношение

$$g_n - r_n = \alpha \cdot 2^n.$$

Для нас единственно важно, что $g_n \neq r_n$, т.е. что одно из этих чисел (скажем, g_n) **строго** больше 2^{n-1} .

Таким образом, нам «всего лишь» осталось показать, что для *произвольного* подмножества $V_n \subseteq \{0, 1\}^n$ с $|V_n| > 2^{n-1}$ в индуцированном этим подмножеством графе H_n есть вершина степени $\geq n^{1/2}$.

Упражнение 19. Покажите, что это утверждение станет неверным, если неравенство $|V_n| > 2^{n-1}$ заменить на нестрогое.

Это и есть сведение Готсмана–Линиала. Для полноты картины отметим, что оно работает в обе стороны, и если в выделенном курсивом утверждении заменить $n^{1/2}$ на n^ϵ для произвольной константы ϵ , то получится еще одна переформулировка гипотезы о блочной чувствительности.

Итак, нижняя оценка на максимальную степень H_n и есть то, что доказывает Хуан. Доказательство несложно для понимания, но использует некоторые элементарные (на уровне первого курса любого математического факультета) факты из линейной алгебры. Строго их формулировать, а тем более доказывать, у нас возможности нет, но некоторое представление, о чем идет речь, мы дать можем.

Матрицей называется квадратная таблица A размера $N \times N$, состоящая из чисел $a_{i,j}$ ($1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N$). Матрица A называется *симметричной*, если $a_{i,j} = a_{j,i}$ для

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$AX = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$X^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = 5$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

Рис. 8

всех i, j . На картинке это означает, что матрица не изменится при отражении относительно *главной диагонали*, идущей из левого верхнего в правый нижний угол (рис.8). В оставшейся части статьи нас будут интересовать исключительно симметрические матрицы.

Вектор размерности N – это столбец X высоты N , также состоящий из чисел x_j ($1 \leq j \leq N$). Матрицу A размера $N \times N$ всегда можно умножить на вектор той же размерности N ; получится новый вектор, который обозначается через AX . В i -й позиции этого вектора помещается значение суммы $a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,N}x_N$; пример такого вычисления приведен на рисунке 8.

Этот пример интересен еще и потому, что вектор AX оказывается *гомотетичен* исходному вектору X , т.е. существует такое число λ , что $(AX)_i = \lambda x_i$ для всех $1 \leq i \leq N$, или, в векторных обозначениях, $AX = \lambda X$. Векторы, обладающие этим замечательным свойством, называются *собственными* (для матрицы A), а «коэффициент гомотетии»³ λ – *собственным значением*, соответствующим собственному вектору X . У каждой матрицы есть тривиальный собственный вектор, а именно, состоящий из одних нулей *нулевой вектор*, но на первый взгляд непонятно, почему у A непременно должны быть какие-то другие.

На самом деле у произвольной (т.е. не обязательно симметрической) матрицы их

вполне может и не оказаться, и для полного понимания картины необходимо привлекать комплексные числа. Но для симметрических матриц все существенно проще: всякая такая матрица обладает полным набором $X^1, \dots, X^N$ **линейно независимых** (см. следующий абзац) собственных векторов. Так, например, наша матрица A на рисунке 8, помимо уже известного нам собственного вектора $X = X^1$ обладает еще двумя, X^2 и X^3 . Тем самым у нас также появляется набор собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, соответствующих этим собственным векторам, причем (все это надо доказывать, конечно) с точностью до перестановки этот набор зависит только от матрицы A и называется ее *спектром*. В нашем примере спектр матрицы состоит из чисел $(5, -1, -1)$; обратите внимание, что в нем появляются не только отрицательные числа, но и кратные значения, т.е. одному и тому же собственному значению могут соответствовать несколько (линейно независимых!) собственных векторов.

В заключение нашего краткого экскурса в линейную алгебру скажем, как мы уже обещали, несколько слов про теорию размерности. Векторы $X^1, \dots, X^M$ размерности N называются *линейно независимыми*, если не существует никакой нетривиальной (т.е. такой, в которой хотя бы одно из α_i отлично от 0) линейной комбинации $\alpha_1 X^1 + \dots + \alpha_M X^M$, равной нулевому вектору. Число линейно независимых векторов M в такой системе не превосходит размерности N , и в случае $M = N$ система линейно независимых векторов называется *базисом*. Базисы можно также охарактеризовать в противоположных (или, как часто говорят математики, *двойственных*) терминах. Именно, система $X^1, \dots, X^N$ N -мерных векторов является базисом тогда и только тогда, когда любой другой N -мерный вектор Y можно выразить в виде линейной комбинации $\alpha_1 X^1 + \dots + \alpha_N X^N$.

Упражнения

20. Докажите, что если $X^1, \dots, X^N$ – базис, то всякий N -мерный вектор обладает **единственным** представлением вида $\alpha_1 X^1 + \dots + \alpha_N X^N$.

³ Коэффициент λ вполне может быть нулевым или отрицательным!

21. Проверьте, что векторы X^1, X^2, X^3 на рисунке 8 образуют базис.

Вернемся к доказательству выделенного курсивом утверждения перед упражнением 19. В качестве первого шага Хуан конструирует специальную симметрическую матрицу A_n размера $N \times N$, где $N = 2^n$, строки и столбцы которой занумерованы **всеми** вершинами гиперкуба x, y (а не только элементами V_n). Все элементы в этой матрице равны 0, 1 или -1 , причем $A_n(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда x и y не соединены ребром (в частности, $A_n(x, x) = 0$ на диагонали).

Если бы вхождений -1 в матрице A_n не было вообще, то она называлась бы *матрицей смежности* (гиперкуба); это очень важный объект в теории графов. Ее спектр хорошо известен, но он не тот, что нам нужен. Путем замены 1 на -1 в правильным образом выбранных местах удастся добиться того, что спектр будет состоять ровно из $N/2$ значений $n^{1/2}$ и $N/2$ значений $-n^{1/2}$.

Далее, множество вершин V_n определяет симметрическую подматрицу B_n в A_n . Эта подматрица имеет большой размер, и мы хотим вывести отсюда какое-нибудь нетривиальное заключение про ее спектр. Слегка упрощая доказательство Хуана, рассмотрим систему, состоящую из $N/2$ линейно независимых собственных векторов $X^1, \dots, X^{N/2}$ матрицы A_n , соответствующих собственному значению $n^{1/2}$, а также векторов Y^v , для каждого $v \in V_n$, в которых в v -й позиции стоит 1, а все остальные позиции заполнены нулями. Векторов в этой системе строго больше, чем N , поэтому базисом она быть не может. Следовательно, существует нетривиальное равенство вида $\alpha_1 X^1 + \dots + \alpha_{N/2} X^{N/2} + \sum_{v \in V_n} \beta_v Y^v = 0$; легко понять (проверьте!), что тогда $\sum_{v \in V_n} \beta_v Y^v$

будет нетривиальным собственным вектором матрицы B_n , и ему все еще соответствует собственное значение $n^{1/2}$.

Наконец доказывается, что максимальная степень в графе H_n не меньше, чем любое собственное значение матрицы B_n . Если бы отрицательных вхождений -1 в матрице B_n не было (т.е. B_n была бы просто матрицей смежности), то этот факт широко известен и не менее широко применяется в теории графов. Замена некоторых 1 на -1 этому рассуждению только помогает, и это легко проверяется.

Упражнение 22. Пусть G – произвольный граф с множеством вершин $\{1, 2, \dots, N\}$ и A – произвольная симметрическая матрица размера $N \times N$ такая, что $a_{i,j} = 0$, если i и j не соединены ребром, и $a_{i,j} = \pm 1$, если соединены. Докажите, что всякое собственное значение λ матрицы A не превосходит максимальной степени $\Delta(G)$ графа G .

Вот собственно и все.

В заключение хочется отметить, что важные математические открытия происходят по-разному. Бывает, что решение требует построения глубоких и важных теорий, усилий нескольких поколений математиков и т.д. А бывает, как в нашем случае, что все, что для этого требуется, – это одна красивая и неожиданная идея. Прелесть математики (одна из многих) состоит в ее непредсказуемости: предугадать развитие событий заранее совершенно невозможно.

Литература

1. H.Huang. Induced subgraphs of hypercubes and a proof of the sensitivity conjecture. – Annals of Mathematics, 190(3):949–955, 2019.
2. А.А.Разборов. Теория сложности. В книге: Математическая составляющая, 2-е изд. – М.: Математические этюды, 2019.
3. P.Hatami, R.Kulkarni, and D.Pankratov. Variations on the sensitivity conjecture. – Theory of Computing Library, Graduate Surveys, 4:1–27, 2011.