Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Толпыго, Числа харшад, *Квант*, 2020, номер 10, 34–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20201004>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 18:16:44

Числа харшад

А. ТОЛПЫГО

КРУГ ЗАДАЧ, КОТОРЫЕ РАССМАТРИВАЮТСЯ в этой статье, можно описать одной фразой:

Как часто бывает, что число делится на сумму своих цифр?

Оказывается, что этот простой вопрос приводит к целому циклу довольно разнообразных задач.

Числа, обладающие этим свойством, называются числами Нивена, или числами харшад (от санскритского «харша» – великая радость); такое название дал им индийский математик Д. Ч. Капрекар; для краткости будем их называть Х-числами. Поскольку однозначные числа заведомо являются таковыми, сразу условимся, что мы рассматриваем только те Х-числа, в которых не менее двух (или даже лучше, не менее трех) знаков.

Начнем с того очевидного факта, что все числа с суммой цифр 3 или 9 – харшад. Легко также привести примеры Х-чисел с другими небольшими суммами цифр; например, таковы все четные числа с суммой цифр 2 или 6. Нетрудно придумать и другие примеры: это числа 224, 605 или 999999999.

А как быть, если сумма цифр велика? Всегда ли можно построить такое число харшад? Ответ – положительный.

Утверждение 1. *Для любого натурального m существует Х-число с суммой цифр m .*

Доказательство. Рассмотрим числа $1, 10, 100, \dots, 10^k, \dots$. Согласно принципу Дирихле, существует такой остаток r , что сколь угодно большое количество из этих чисел дают при делении на m остаток r . Теперь достаточно взять сумму m соответствующих чисел 10^k для разных таких k (можно и для совпадающих, но в количестве не более 9).

Пример 1. Пусть $m = 37$. Поскольку 999 делится на 37, то все числа $1, 10^4, 10^7, \dots, 10^{3k+1}$ дают одинаковые остатки при делении на 37. Таким образом, мы можем взять

число $100100100\dots 1$ (и так 37 раз); но проще взять, например, число 9009009009001 .

Замечание. Ниже будет доказано существенно более сильное утверждение, а именно: каково бы ни было m , доля Х-чисел среди всех чисел с суммой цифр m больше нуля (стремится к пределу, который больше нуля; более точная формулировка будет дана ниже).

Длинные ряды

Назовем *рядом длины k* последовательность чисел $n, n + 1, n + 2, \dots, n + k - 1$, которые все харшад.

Поскольку ряд всегда полностью определяется своим первым членом, в дальнейшем мы, как правило, будем выписывать только его.

Нетрудно привести пример ряда длины 3: он может, например, начинаться с числа 110, поскольку 111 и 112 – тоже Х-числа. (Годятся также числа 1010, 10010 и т.д.)

А можно ли построить ряд подлиннее?

Утверждение 2. *Существует ряд длины 10.*

Для доказательства, конечно, достаточно привести пример (что мы сейчас и сделаем), но интересно ведь знать, как его построить. Можно, разумеется, поручить дело компьютеру (и этот способ приводит к цели), но тогда – где же тут математика?

Было бы очень легко построить пример, если бы нам разрешалось рассматривать однозначные числа (все числа от 1 до 10 делятся на сумму своих цифр), но это запрещено. Тем не менее это подсказывает идею: пусть первое число оканчивается нулем, и пусть сумма его цифр равна r . Тогда следующие числа будут кончаться на 1, 2, ..., 9, а их суммы цифр будут $r + 1, \dots, r + 9$. Нетрудно было бы найти число (притом даже с заданной суммой цифр, если только она достаточно велика), которое делится на все эти числа, но нам нужно, чтобы делилось не одно число, а последовательные.

Но это тоже можно сделать, если применить вот какую хитрость.

Начнем с некоторого «удобного» числа (в чем именно состоит его «удобство», будет видно дальше), которое мы примем за r , т.е. за сумму цифр первого из чисел нашего ряда. Это число мы назовем *опорным числом*.

Для начала возьмем в качестве опорного число 30. Предположим, что первое наше число заканчивается цифрами ...30 или,

лучше, ...00030 (чем это лучше – станет ясно очень скоро). Тогда следующие числа будут заканчиваться на ...00031, ...00032 и т.д. Поскольку суммы цифр следующих 9 чисел будут равны как раз 31, 32 и т.д. – получается, что «хвост» каждого из следующих чисел делится на то, что нам нужно.

Остается добиться того, чтобы начало числа, обозначим его A , также делилось сразу на все нужные числа и чтобы его сумма цифр равнялась 27.

Попробуем теперь получить подряд 5 X -чисел. Для этого A должно делиться на 30, 31, 32, 33 и 34 (а также на 9, поскольку сумма его цифр должна быть 27). Впрочем, делимость на 30 и на 32 получается автоматически (вот зачем нужны были три нуля перед тридцаткой!), и требуется только, чтобы оно делилось на 9, 31, 11 и 17. Иначе говоря, A должно делиться на произведение $9 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 31 = 52173$.

Если бы сумма цифр этого числа равнялась 27, можно было бы на этом и остановиться. Но она равна 18. Можно было бы записать это число дважды (при этом делимость сохранится), но тогда сумма получится 36. Как быть?

Ответ несложен: надо записать его дважды, а затем «вдвинуть» одно число в другое так, чтобы произошел ровно один перенос в разрядах. Получится вот что:

$$\begin{array}{r} 52173 \\ 52173 \\ \hline 52225173 \end{array}$$

Таким образом, число 5222517300030 годится: оно и следующие 4 числа – харшад.

Читателям предлагается самостоятельно убедиться в том, что таким же способом можно построить ряд из 10 последовательных X -чисел. Единственная оговорка состоит в том, что здесь число 30 уже не годится в качестве опорного: оно слишком мало, и делимость сразу на все нужные делители не получится. Однако числа 120 уже достаточно.

Задача 1. Найдите 10 подряд идущих X -чисел, исходя из опорного числа 120.

Замечание. Для пяти чисел можно поступить и проще, а именно, умножить 52173 на 3. Получается 156519 – сумма цифр как раз 27.

Этот способ предпочтительнее в том смысле, что X -числа получаются примерно в 300 раз меньше (первое – 15651900030). Но его слабое место в том, что не видно гарантии, что подходящий множитель всегда удастся подобрать (строго говоря, первый способ тоже полной гарантии не дает, но там есть, так сказать, 99%-я гарантия). Так что если вам, читатели, придется решать сходную задачу, то вот совет – сначала попробовать второй способ: подобрать подходящий множитель. А если не удастся – применяйте первый.

Задача 2. Найдите 6 подряд идущих X -чисел, исходя из опорного числа 20.

Итак, ряд длины 10 получить можно. А еще длиннее? Может быть, существует ряд любой длины? Нет.

Утверждение 3. *Не может стоять подряд более 20 X -чисел.*

Для доказательства разобьем натуральный ряд на сотни, причем каждую сотню будем отсчитывать от $A00$ до $A99$ (A – любой набор цифр), т.е. в каждой сотне совпадают все цифры, кроме двух последних.

Лемма. *В сотне не может стоять более 11 X -чисел подряд.*

В самом деле, пусть N – одно из наших чисел, $S(N)$ – сумма его цифр. Как правило, выполняется равенство $S(N) = S(N + 9)$. Если так, то $S(N)$ должно быть также делителем разности этих чисел, т.е. делителем 9. Если, сверх того, N не делится на 3, то это означает, что $S(N) = 1$, а этот случай заведомо не годится.

Остается сообразить, что это рассуждение проходит для любых 12 чисел подряд в одной сотне. Действительно, среди 12 чисел есть три пары, различающиеся на 9, и легко сообразить, что как минимум для одной рассуждение проходит.

Из сказанного пока следует только, что не может стоять подряд более 22 чисел харшад. Но наше рассуждение нетрудно усилить.

Назовем «перескоком» место перехода от одной сотни к другой, т.е. место между числами $A99$ и $(A+1)00$. Допустим, что подряд стоит более 11 чисел; из сказанного видно, что они обязаны стоять на перескоке. Допустим, что их 21 или более, тогда либо до, либо после перескока стоит не менее 11 чисел. Но этого быть не может. В самом деле,

если эти 11 чисел стоят до перескока, то это числа от $A89$ до $A99$; но тогда $S(A89) = S(A98)$ – сумма цифр одинаковая и заведомо больше 9 – следовательно, они оба не могут быть X -числами.

Допустим теперь, что 11 чисел стоят после перескока, т.е. от $(A+1)00$ до $(A+1)10$. Тогда $S((A+1)01) = S((A+1)10)$ – следовательно, сумма должна быть равна либо 3, либо 9.

Но если $S = 3$, то $S((A+1)08) = 10$, а это число на 10 не делится – противоречие. Случай $S = 9$ аналогичен.

Впрочем, очень длинный ряд все же получить можно, но только с помощью жульничества. А именно, видоизменим нашу задачу: выберем произвольное натуральное $q > 1$ и будем рассматривать q - X числа, т.е. числа, которые больше q^2 и которые делятся на сумму своих цифр, записанную в q -ичной системе.

Примеры

2. Число 10 является 3- X числом, поскольку в троичной системе оно записывается как 101 и притом делится на 2.

3. Число 231 является 11- X числом, поскольку в одиннадцатеричной системе его сумма цифр равна 11, и оно делится на 11. (В самом деле, $231 = 121 + 10 \cdot 11$ – в одиннадцатеричной системе имеет вид $1 [10] 0$).

Задача 3. Докажите, что для любого n существует такое q , что в q -ичной системе существует n подряд q - X чисел.

Задача 4. а) Докажите, что в двоичной системе не может стоять подряд 5 чисел харшад.

б) Постройте подряд 4 таких числа.

Вернемся, однако, к числам в десятичной записи. Как мы видели, максимальная длина ряда – 20. Можно ли усилить эту оценку, например доказать, что длина не больше 19?

Оказывается, ответ отрицательный: построить 20 чисел харшад подряд можно, но трудно. Это сделано с помощью компьютера, причем числа в примере насчитывают более 40 миллиардов цифр (!). Мы попробуем обойтись без компьютера и потому ограничимся тем, что наметим способ построить подряд 11 чисел харшад.

В качестве опорного числа примем 800, причем (маленькая хитрость) будем считать, что это сумма цифр *второго* числа

ряда. Наши одиннадцать чисел, таким образом, имеют следующий вид:

$$A799, A800, A801, \dots, A809.$$

При этом предполагается, что сумма цифр числа A равна 792. В таком случае суммы цифр нашего ряда равны соответственно 817, 800, 801, ..., 809.

Далее необходимо найти число, которое делится на все необходимые числа от 800 до 809 (как мы уже знаем, надо взять НОК этих чисел, но некоторые множители – например, двойки – можно отбросить) и, сверх того, дает нужный остаток от деления на 817.

Поскольку число $817 = 19 \cdot 43$ взаимно просто с числами от 800 до 809, китайская теорема об остатках гарантирует, что такое число A существует. При этом сумма его цифр еще не слишком велика; она существенно меньше 792, и потому нужно слева от A приписать еще одно число B , которое уже делится на все те же числа и сверх того на 817. Искомое число, таким образом, имеет вид BA (это не произведение, а два числа, записанные подряд; правильнее, таким образом, было бы писать $B \cdot 10^r + A$), а второе число нашего ряда – $BA800$.

Подобрать нужные числа A , B нелегко, но можно. Главная трудность, пожалуй, заключается в том, что число с суммой цифр 800 (и более) должно иметь как минимум сто цифр; автору удалось довести этот труд до конца (и даже вручную!), но приводить соответствующий пример здесь вряд ли стоит.

Заметим еще, что, взяв за опорное число 800, мы уже не сможем продлить этот ряд. В самом деле, продлить его вправо (на число ...810) невозможно, как было показано при доказательстве утверждения 3. Если же мы попытаемся его продлить влево, т.е. дописать к нему число ...798, то сумма цифр такого числа должна равняться 816, тогда как число ...98 не делится даже на 4.

Доля X -чисел

Займемся теперь другим вопросом, а именно: много ли существует чисел харшад?

Понятно, разумеется, что их бесконечно много, но ведь и бесконечность бывает разная: к примеру, полных кубов меньше, чем полных квадратов, а квадратов значительно меньше, чем простых чисел. (Замечание: второе неочевидно, хотя и верно; первое же вполне очевидно, но... подумайте сами, как

придать этому утверждению точный математический смысл.)

Естественная постановка задачи такова: выберем произвольное N , и пусть $M = M(N)$ – количество X -чисел, меньших N . Чему равен предел отношения M/N , когда N стремится к бесконечности?

Утверждение 4. *Предел отношения M/N равен 0.*

Докажем, например, что для достаточно больших N доля X -чисел среди первых N меньше 10^{-4} .

Для этого выберем достаточно большое N и разобьем все числа от 101 до N на миллионы; при этом каждый миллион мы будем считать от A000000 до A999999 (в каждом миллионе все цифры совпадают, кроме последних шести; правда, при таком счете в первом миллионе получается на сто одно число меньше, но это неважно).

Пусть S – сумма цифр числа A . Тогда, очевидно, в выбранном миллионе любое число имеет сумму цифр от S до $S + 54$ – есть ровно 55 разных значений.

Теперь разобьем все миллионы на две группы: те, в которых $S < 1\,000\,000$, и все остальные. Сколько именно X -чисел в миллионах первого рода, неясно (вполне возможно, что довольно много; например, нетрудно доказать, что в первом миллионе более десяти тысяч X -чисел, причем и эта оценка довольно грубая). Но на наше счастье, нам не нужно этого знать, поскольку *миллионов первого рода мало*: если, например, $N > 10^{10^9}$, т.е. соответствующие числа имеют до миллиарда цифр, то ясно, что почти всегда сумма цифр A намного больше миллиона (читателям предлагается самостоятельно оценить долю «малых» миллионов).

С другой стороны, если наш миллион – второго рода, то в нем не более 55 X -чисел. В самом деле, поскольку любая сумма цифр R больше миллиона, то числа, делящиеся на R , встречаются с интервалом больше миллиона, так что в наш миллион попадает, самое большое, одно из них (причем нам даже нет надобности учитывать условие харшад). Итак, почти в каждом миллионе не более 55 X -чисел, соответственно, их доля не больше $55/10^6$, что и требовалось.

Чтобы закончить доказательство, надо проделать аналогичную операцию для любо-

го другого, сколь угодно малого числа – что читатель сделает без труда.

Видно также и другое: для этого необходимо брать чудовищно большие N . Можно сказать, что доля X -чисел хотя и стремится к нулю, но стремится очень медленно, «на глазок» – как $1/\ln N$. В действительности так оно и есть, но доказательство этого факта уже выходит за рамки элементарной математики.

Еще раз видоизменим задачу и будем рассматривать только числа с заданной суммой цифр r . Какова будет доля X -чисел (или, попросту говоря, доля чисел, делящихся на r) среди них?

Здесь, разумеется, картина совершенно иная: например, если r равно единице, трем или девяти, то ВСЕ рассматриваемые числа – харшад.

Для других r это не так, но тем не менее вполне вероятно, что их доля велика.

Итак, пусть опять задано произвольное N . Чтобы облегчить дело, отбросим условие, что наши числа больше 100, – ясно, что при этом предел не изменится, а расчеты немножко упрощаются. Пусть $P_r = P(N, r)$ – количество чисел, меньших N и с суммой цифр r , а $M_r = M(N, r)$ – количество X -чисел среди них. Мы вновь будем искать предел отношения M_r/P_r , который мы обозначим через $L(r)$.

Пример 4. Если $r = 2$, то $L(2) = \lim M_2/P_2 = 1$.

Доказательство. Рассмотрим все числа, имеющие не более n знаков и с суммой цифр 2. Это, во-первых, числа вида $200\dots 0$ (число нулей – от 0 до $n-1$, причем все эти числа – харшад), и во-вторых, числа вида $100\dots 0100\dots 0$. Чисел второго вида имеется C_n^2 , и не-харшад среди них – только те, у которых вторая единица стоит на последнем месте. Таких всего лишь $(n-1)$. Таким образом, всего чисел с суммой цифр два имеется $n + C_n^2$, а количество X -чисел среди них равно $n + C_n^2 - (n-1) = C_n^2 + 1$. Ясно, что $L(2) = 1$.

Заметим теперь, что такое же доказательство, лишь с несущественными изменениями, проходит для всех чисел вида $2^k 5^l$. Действительно, раз цифр очень много, а сумма их фиксирована, то это бесспорно означает, что почти все цифры равны 0, и

кроме того, означает, что несколько последних цифр, скорее всего, равны нулю (доля чисел, для которых это не так, стремится к 0). Но тогда «почти все» наши числа делятся на степень десятки, и тем более делятся на $2^k 5^l$.

Утверждение 5. Для любого r предел $L(r)$ существует, и он больше 0.

Набросок доказательства. Рассмотрим все n -значные числа для достаточно большого n . Почти все такие числа с суммой цифр r имеют вид $00...0100...01...0100...0$. Общее количество таких чисел равно . Некоторые из них являются X -числами — это те, у которых единицы стоят на «правильных» местах. Доля «правильных» расстановок не зависит от n . Соответственно, можно вычислить предел, и он больше нуля.

Мы разобрались с числами 3, 9 и $2^k 5^l$. А как быть с другими числами? Займемся, например, первой дюжиной.

Как мы видели, $L(r) = 1$ для $r = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12$. (Например, для того чтобы число с суммой цифр 12 было харшад, достаточно, чтобы оно заканчивалось двумя нулями, а это, как сказано выше, бывает «почти всегда».) Таким образом, остаются только числа 7 и 11, для которых получаются довольно содержательные задачи. Мы ограничимся разбором случая $r = 11$.

Как уже сказано, если количество цифр достаточно велико («стремится к бесконечности»), то почти все числа с суммой цифр r имеют вид $00...0100...01...100...0$ (r единиц на разных местах и помногу нулей между ними). Это верно и для $r = 11$.

Назовем цифру числа «четной» (в кавычках), если она стоит на четном по счету месте (и вне зависимости от того, какая это цифра). Соответственно, назовем ее «нечетной», если она стоит на нечетном месте.

Хорошо известен признак делимости на 11: число делится на 11, либо если сумма всех его «четных» цифр равна сумме «нечетных», либо если разность между этими суммами сама делится на 11. Поскольку у нас сумма всех цифр равна 11, т.е. нечетна, то первый случай исключается, а второй возможен только, если все 11 ненулевых цифр «одинаковы», т.е. стоят только на четных местах или только на нечетных. Но вероятность такого распределения составляет 2^{-11} для каждого из этих двух случаев, а суммар-

но она равна 2^{-10} , т.е. немного меньше чем 0,001.

Рассуждение с «вероятностью», разумеется, нестрогое. Строгое доказательство выглядит так: всего 11 цифр на разных местах можно расставить C_n^{11} способами, тогда как на четных местах их можно расставить $C_{n/2}^{11}$ способами (если n четно; для нечетного n придется еще писать ответы отдельно для четных и нечетных цифр, но на окончательный ответ это не влияет). Легко проверить, что отношение этих чисел при больших n стремится как раз к 2^{-11} .

Окончательно имеем: $L(11) = 1/1024$.

Замечание. Этот ответ (получилось очень маленькое число) нетипичен. Например, если вместо 11 взять $2 \cdot 11 = 22$, то предел сразу станет намного больше. А именно, $L(22) \approx 1/6$ (попробуйте сами найти это число). Смотрите также ниже задачи 7 и 9.

Другие задачи

Выше было показано, что в одном десятке может быть сколько угодно X -чисел — даже все 10. С другой стороны, было показано, что в сотне непременно есть числа не харшад.

Задача 5. Каково может быть максимальное число X -чисел в одной сотне:

а) если сотню мы считаем непременно от ...00 до ...99;

б) в общем случае: если сотня считается от некоторого k до $k + 99$?

Задача 6. Оцените количество X -чисел в первом миллионе. А именно:

а) докажите, что в нем более 10000 X -чисел;

б) дайте какую-нибудь оценку сверху: «чисел харшад не более какого-то числа».

Задача 7. Найдите $L(7)$.

Говорят, что простое число p имеет полный цикл, если период десятичной дроби $1/p$ имеет $(p - 1)$ знаков. Из чисел от 1 до 40 такими числами являются 7, 17, 19, 23, 29 (но не 11, 13, 31, 37). К примеру:

$$1/7 = 0,(142857) \text{ или}$$

$$1/17 = 0,(0588235294117647).$$

Задача 8. Найдите $L(p)$ в предположении, что p имеет полный цикл.

Задача 9. Докажите, что $L(27) = 1/3$.

Задача 10. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ существует лишь конечное число простых чисел p таких, что $|pS(p) - 1| > \varepsilon$.