Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Чан Куанг Хюнг, Об ортоцентрических четверках, связанных с треугольником, *Квант*, 2020, номер 11, 21–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20201103>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 18:34:01

Об ортоцентрических четверках, связанных с треугольником

ЧАН КУАНГ ХЮНГ

В этой статье рассказывается о некотором обобщении задачи M2553. В процессе рассуждений мы также получим решение задачи M2615.

Рассмотрим произвольный треугольник ABC . Пусть вписанная в него окружность имеет центр I и касается сторон BC , CA и AB в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно.

В задаче М2553 через K и L были обозначены центры окружностей, вписанных в четырехугольники AB_1IC_1 и BA_1IC_1 соответственно, а через H — основание высоты, опущенной из точки C . Точки P и Q определялись как точка пересечения биссектрисы угла AHC с A_1C_1 и точка пересечения биссектрисы угла BHC с B_1C_1 соответственно. Утверждение задачи состояло в том, что четверка K, L, P, Q — ортоцентрическая.

Решение задачи М2553 было приведено в статье А.Заславского «Об одной ортоцентрической четверке» в «Кванте» №7 за 2019 год. Там же доказывались некоторые другие свойства этой конструкции. В частности, было показано, что прямая PQ проходит через C , точка D пересечения KQ и PL лежит на AB , при этом CD – общая касательная к окружностям, вписанным в четырехугольники AB_1IC_1 и BA_1IC_1 . Автор обнаружил обобщения этих фактов, которые можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема. Пусть D – произвольная точка на стороне AB треугольника ABC , а K и L – центры окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD соответственно (рис. 1). Пусть $P = LD \cap AK$,

Рис. 1

$Q = KD \cap B_1C_1$. Тогда прямая PQ проходит через S , а четверка точек K, L, P, Q — ортоцентрическая.

Поскольку прямые DKQ и DLP – биссектрисы смежных углов, они перпендикулярны, т.е. одна из нужных перпендикулярностей установлена: $QK \perp PL$. Ниже мы докажем, что $CP \perp KL$. Поскольку, аналогично, $CQ \perp KL$, это завершит доказательство теоремы, так как отсюда будет следовать и то, что точки C, P, Q лежат на одной прямой, и еще одна перпендикулярность $PO \perp KL$.

Введем точку M пересечения $СК$ с B_1C_1 .
В качестве вспомогательного утверждения
будет выступать задача М2615.

М2615. В треугольнике ABC вписанная окружность касается сторон CA и AB в точках B_1 и C_1 соответственно (рис.2). На стороне AB выбрана произвольная

Рис. 2

точка D . Точка L – центр вписанной окружности треугольника $B CD$. Пусть биссектриса угла ACD пересекает прямую B_1C_1 в точке M . Докажите, что $\angle CML = 90^\circ$.

Рассмотрим рисунок 3, на котором все обозначения согласованы с нашими предыдущими обозначениями, поскольку CK –

Рис. 3

биссектриса угла ACD . Утверждение задачи M2615 можно теперь переформулировать следующим образом: точка M лежит на окружности ω , построенной на KL как на диаметре.

Ясно, что D лежит на ω . Кроме того, по известной задаче Шарыгина (см., например, <http://zadachi.mccme.ru/2012/task10602>) на ω лежит и C_1 (отметим, что это утверждение также следует из задачи M2007 в случае вырожденного описанного четырехугольника).

Точка M лежит на окружности (KC_1D) , т.е. на окружности ω , поскольку

$$\angle AKD = 90^\circ + \frac{\angle BAC}{2} = \angle B_1C_1B.$$

Тем самым, $\angle KLM = 90^\circ$ как угол, опирающийся на диаметр. Задача M2615 реше-

на.

Заметим, что в вырожденном случае, когда $D = L = B$, задача M2615 превращается в задачу 255 из задачника И.Ф.Шарыгина «Геометрия, 9–11 классы: От учебной задачи к творческой» (М.: Дрофа, 1996).

Аналогично точке M введем в рассмотрение точку N пересечения CL с A_1C_1 , она также лежит на ω . Пусть CD вторично пересекает ω в точке J . Из равенства углов CDK и KDA следует равенство дуг KC_1 и KJ окружности ω , таким образом, точка J симметрична точке C_1 относительно KL .

В качестве отступления заметим, что известны другие описания точки J : эта точка лежит на второй (помимо AB) общей внешней касательной к окружностям, вписанным в треугольники ACD и $B CD$, а также J – точка на CD такая, что $CJ = CB_1 = CA_1$ (см., например, задачу <http://zadachi.mccme.ru/2012/task4278>, которая предлагалась на Турнире городов в 1994 году).

Далее доказательство теоремы можно завершить коротко, применив теорему Паскаля к шестерке точек $NLLDJC_1$ с кратной точкой L (все названные точки лежат на ω). Получаем, что точки $S = NL \cap DJ$, $P = LD \cap C_1N$ лежат на одной прямой с бесконечно удаленной точкой пересечения C_1J с касательной к ω , проведенной в точке L . Иными словами, $CP \parallel C_1J$. Тем самым, нужная перпендикулярность $CP \perp KL$ установлена, поскольку $C_1J \perp KL$.