Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Коркин, Капля дождя, *Квант*, 2020, номер 11, 34–37

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20201104>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 16:03:00

Капля дождя

Р.КОРКИН

ЗАДАЧА ПРО ДВИЖЕНИЕ КАПЛИ дождя уже рассматривалась в «Кванте» (1982, №4, с.31 и 2019, №12, с.26; автор публикаций – А.Стасенко), но несколько в другом аспекте. А именно, формулировка была следующей:

Пусть в облаке из микрокапель одна из них стала падать, поглощая на своем пути встречные капли. Каков закон движения падающей капли со временем?

Предполагалось, что движение капли установилось, но оно настолько медленное, что сопротивлением воздуха можно пренебречь. Изменение формы капли и ее распад на более мелкие при соударении исключались. Иными словами, уточнялась постановка задачи о капле, падающей и растущей в неподвижном тумане, ранее опубликованной в курсе теоретической физики А.Зоммерфельда («Механика»). И приводилось красивое и простое решение, дающее ответ: капля движется со средним ускорением $g/7$.

Однако постановка задачи о движении капли без учета силы сопротивления воздуха не позволяет исследовать динамику реальной капли. Поэтому

кажется интересным рассмотреть задачу о движении капли с учетом силы сопротивления воздуха и поглощения на пути движения встречных капель (рис.1). Это позволит ответить на следующие вопросы: какова концентрация встречных капель в воздухе; какие типичные размеры имеют капли дождя; с какими максимальными скоростями они падают на поверхность Земли.

Рис. 1. Движение капли с поглощением встречных капель

Уравнение движения капли можно записать в виде

$$m\Delta v = mg\Delta t - F_c\Delta t - v\Delta m. \quad (1)$$

Первое слагаемое в правой части соответствует ускорению капли в поле тяжести, второе учитывает сопротивление воздуха, а третье – потери импульса за счет слияния со встречными каплями. Сила сопротивления воздуха, вообще говоря, состоит из двух компонент: лобовое сопротивление и вязкое трение. Точные формулы выглядят следующим образом:

$$F_1 = C \frac{\rho_0 v^2}{2} \pi r^2,$$

$$F_2 = 6\pi\eta r v,$$

хотя по порядку величины эти обе компоненты могут быть оценены из соображений размерности. Здесь C – аэродинамический коэффициент лобового сопротивления, ρ_0 и η – плотность и вязкость воздуха. Аэродинамический коэффициент C зависит от геометрии тела, скорости движения, а также параметров воздуха и, вообще говоря, не является константой. Но для капли сферической формы в диапазоне малых скоростей будем использовать значение C порядка 0,5.

Подставляя выражения сил сопротивления в формулу (1), получим

$$m\Delta v = mg\Delta t - v\Delta m -$$

$$- \frac{C\rho_0 v^2}{2} \pi r^2 \Delta t - 6\pi\eta r v \Delta t. \quad (2)$$

Однако это уравнение слишком громоздкое для анализа. Давайте сначала изучим падение одинокой капли. Для этого опустим слагаемое, связанное со встречными каплями. Из уравнения понятно, что, начав падать, капля разгонится до некоторой предельной скорости, при которой сила тяжести будет уравновешена двумя силами сопротивления. Решение уравнения относительно скорости дает:

$$v = \sqrt{\left(\frac{6\eta}{C\rho_0 r}\right)^2 + \frac{8\rho g r}{3C\rho_0}} - \frac{6\eta}{C\rho_0 r}. \quad (3)$$

Результат отображен на рисунке 2. Интересно, что такое упрощенное рассмотрение дает зависимость максимальной скорости капли плотностью ρ от ее размеров, близкую к наблюдаемым значениям. Так, капли радиу-

Рис. 2. Зависимость предельной скорости капли от ее радиуса

сом 0,3, 1 и 3 мм в действительности имеют максимальные скорости 2,5, 6,5 и 10 м/с соответственно (см., например, книгу: Б. Дж. Мейсон. Физика облаков. — Гидрометеиздат, 1961), а на графике это 3, 6,5 и 11 м/с. Заметим, что без учета вязкого трения значения скоростей несколько завышены лишь для капель радиусом менее 1 мм.

Понятно, что скорости действительно должны быть выше для крупных капель — сила тяжести растет с радиусом быстрее, чем силы сопротивления. Почему же в таком случае эта зависимость не распространяется и на более крупные капли? Ответ состоит в том, что наше приближение не работает, когда перепад давлений из-за сопротивления воздуха сопоставим с давлением поверхностного натяжения: $C\rho_0 v^2/2 \sim 2\sigma/r$, где σ — коэффициент поверхностного натяжения. Вязкое трение здесь опущено, поскольку при больших скоростях лобовое сопротивление доминирует. Отсюда можно найти соотношение между критическими значениями радиуса и скорости капли:

$$v_{\text{кр}}^2 r_{\text{кр}} \sim \frac{4\sigma}{C\rho_0}. \quad (4)$$

Для капель с радиусом 5 мм критическая скорость равна 10 м/с. Таким образом, более крупные капли если и возникнут, то, разогнавшись до критической скорости, будут сначала деформированы, что увеличит их сопротивление, а затем разорваны на множество мелких капель, которые замедлятся, согласно кривой на рисунке 2.

Итак, мы не только выяснили диапазоны

скоростей капель дождя, но и узнали максимальный радиус капель.

Рассмотрим теперь уравнение (2) с учетом слияния капли со встречными. Как мы уже заметили выше, уравнение громоздко для анализа и хотелось бы его упростить. К счастью, для достаточно больших капель и не очень малых скоростей силой вязкого трения можно пренебречь. Действительно, рассмотрим каплю радиусом $r_0 = 0,5$ мм при скорости движения $v \sim 3$ м/с. Используя значения плотности и вязкости воздуха: $\rho_0 = 1,2$ кг/м³ и $\eta = 2 \cdot 10^{-5}$ Па·с, имеем

$$F_1 \sim 4,2 \cdot 10^{-6} \text{ Н} \gg F_2 \sim 5,7 \cdot 10^{-7} \text{ Н}.$$

Таким образом, для качественных оценок максимальных скоростей можно рассмотреть только силу лобового сопротивления.

Вычислим изменение массы капли за счет слияния. Масса встречных капель, собранная за время Δt , равна

$$\Delta m = \alpha \pi r^2 v \Delta t, \quad (5)$$

где α — объемная концентрация капель в воздухе, т.е. объем водяных капель на единицу объема воздуха. Здесь мы предположили, что все капли, встречаемые по пути движения, будут поглощаться. Это не совсем верно, так как не учитываются отскоки капель, но для качественного рассмотрения этого достаточно. Считая капли шарообразными, из закона сохранения массы находим изменение радиуса:

$$4\pi r^2 \Delta r = \pi r^2 \alpha \Delta x.$$

Видно, что радиус растет линейно с пройденным путем. Принимая радиус капли в начальный момент за r_0 , получаем

$$r = r_0 + \frac{\alpha x}{4}. \quad (6)$$

С учетом уравнений (2), (5) и (6) перепишем дифференциальное уравнение для скорости:

$$dv = g dt - \frac{3}{4} \left(\alpha + \frac{C\rho_0}{2\rho} \right) \frac{v^2 dt}{r_0 + \alpha x/4}.$$

Интересно, что вклады слагаемых, соответствующих слиянию капель и силе сопротивления воздуха, имеют идентичные формы. Умножим уравнение на v , введем новую переменную $y = v^2/(2g)$ и произведем замену $dx = v dt$. Тогда выражение несколько упростится:

$$y' = 1 - \frac{ay}{x+b}.$$

Здесь введены параметры $a = 6 + 3C\rho_0/(\rho\alpha)$ и $b = 4r_0/\alpha$. Для того чтобы избавиться от знаменателя, ищем решение в виде $y = z(x+b)$. Подставив это выражение в уравнение, получим

$$z'(x+b) + z = 1 - az.$$

Отсюда находим

$$\frac{dz}{1 - (1+a)z} = \frac{dx}{x+b}.$$

Тем, кто умеет интегрировать, несложно увидеть, что и слева и справа при интегрировании получается натуральный логарифм. Вычислив экспоненты левой и правой частей, получим ответ для функции z :

$$z = \frac{1}{a+1} - \frac{A}{(x+b)^{a+1}},$$

где A – константа интегрирования.

Решение для y запишем в виде

$$y = \frac{x+b}{a+1} - \frac{A}{(x+b)^a}.$$

Полагая начальную скорость капли равной нулю (или $y(0) = 0$), вычислим константу A :

$$0 = \frac{b}{a+1} - \frac{A}{b^a}, \quad A = \frac{b^{a+1}}{a+1}.$$

Теперь выражение для v^2 выглядит следующим образом:

$$v^2 = \frac{8gr_0(1 + \alpha x/(4r_0))}{7\alpha + 3C\rho_0/\rho} \times \left(1 - \frac{1}{(1 + \alpha x/(4r_0))^{7+3C\rho_0/(\alpha\rho)}} \right). \quad (7)$$

Эта общая формула содержит в себе несколько интересных предельных случаев.

1. Сопротивление воздуха и концентрация встречных капель пренебрежимо малы (положим $C \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$). Тогда уравнение (7) упрощается:

$$v^2 = 2gx.$$

Это обычный закон падения капли в поле тяжести в отсутствие сопротивления воздуха, чего и следовало ожидать.

2. Сопротивление воздуха также отсут-

ствует ($C = 0$), но концентрация встречных капель достаточно высокая (радиус нашей капли существенно увеличивается, но $\alpha \gg 4r_0/x$). Тогда

$$v^2 = \frac{2gx}{7},$$

т.е. капля падает с ускорением $g/7$, что согласуется с ответом в вышеупомянутых материалах «Кванта».

3. Сопротивление воздуха присутствует, но нет встречных капель ($C = 0,5$, $\alpha \rightarrow 0$). Этот случай соответствует движению одинокой капли в поле тяжести с учетом сопротивления воздуха. С помощью некоторых алгебраических преобразований формула (7) может быть переписана в виде

$$v^2 = \frac{8\rho gr_0}{3C\rho_0} \left(1 - e^{-3C\rho_0 x/(4\rho r_0)} \right). \quad (8)$$

Экспоненциальное выражение в скобке стремится к нулю с увеличением пройденного пути, и скорость капли стабилизируется. Интересно, что весь разгон у одинокой капли занимает всего несколько метров или десятков метров: $L \sim 4r_0/(3C\rho_0) = 11$ м для капли радиусом 0,5 мм. Асимптотически формула (8) стремится к формуле (3), если положить в ней вязкость равной нулю.

Для количественного анализа нам недостает знаний о параметре α . Концентрация встречных капель определяется количеством сконденсированного водяного пара. Конденсация в облаке происходит за счет перемещения теплых воздушных масс в область более низких температур. Вариации температуры на интересующих нас высотах (до нескольких километров) составляют 10–20 градусов при самой температуре порядка -20 °С. В таком случае плотность капель – так называемая водность – есть разница плотностей насыщенных паров воды, которая колеблется в широких пределах от сотых долей до 3–4 г/м³. Поскольку водность, или массовое водосодержание, w связана с объемным водосодержанием соотношением $w = \alpha\rho$, то α изменяется от 10^{-8} до значений порядка $(3-4) \cdot 10^{-6}$. Можно заметить, что при реальном коэффициенте сопротивления $C \sim 0,5$ вклад слияния капель в знаменатель формулы (7) незначителен: $7\alpha \approx 3 \cdot 10^{-5} \ll C\rho_0/\rho \approx$

$\approx 6 \cdot 10^{-4}$ даже для очень высоких значений водности облака ($\alpha \sim 4 \cdot 10^{-6}$).

Однако учет слияния капель дает интересный эффект по крайней мере для высоких значений $\alpha x / (4r_0)$, т.е. при высоких значениях водности ($\alpha \sim 4 \cdot 10^{-6}$), для крупных облаков (4 км). В этом случае формула (7) упрощается до выражения

$$v^2 = \frac{2gx}{7 + 3C\rho_0/(\alpha\rho)}. \quad (9)$$

Мы снова получили равноускоренное движение, несмотря на силу трения! Физически это возможно благодаря сильному увеличению радиуса капли по ходу движения ($\alpha H / (4r_0) \sim 4$). Сила сопротивления растет пропорционально второй степени, а сила тяжести – третьей степени радиуса, который сам по себе растет со временем, позволяя капле двигаться с небольшим ускорением. Ускорение при этом не зависит от размеров капли и составляет примерно $0,002g$. Достигнув Земли, радиус капли увеличится на $\alpha H / 4 = 4$ мм, а ее скорость составит 13 м/с. Однако, этот ответ несколько завышен даже для начального радиуса 0,5 мм, так как при полном радиусе 4,5 мм начиная со скорости 10,2 м/с капля теряет сферичность согласно формуле(4).

Но можно задаться вопросом о максимальной скорости капли меньшего размера в случае высокой водности. Возможно, такие капли смогут преодолеть барьер, указанный в формуле (3)? Ответ отрицателен: равноускоренное движения в облаке высокой водности (9) лишь соответствует более плавному разгону, нежели согласно (8). Конечные скорости все равно ограничены формулами (3) вплоть до значений скорости (4). Действительно, правая часть формулы (9) может быть переписана так:

$$\begin{aligned} \frac{2gx}{7 + 3C\rho_0/(\alpha\rho)} &\approx \frac{2g(\alpha x/4)}{7\alpha/4 + 3C\rho_0/(4\rho)} \approx \\ &\approx \frac{2gr}{7\alpha/4 + 3C\rho_0/(4\rho)} \approx \frac{8\rho gr}{3C\rho_0}. \end{aligned}$$

Напоследок давайте оценим концентрацию капель в облаке и среднее расстояние между каплями. Поскольку коэффициент

$\alpha \leq 4 \cdot 10^{-6}$, а типичные размеры капель в облаке оценивались выше в десятые и сотые доли миллиметров, то концентрация капель получается порядка 10^{-8} – 10^{-7} на кубический метр, а расстояние между каплями составляет сантиметры.

Стоит заметить, что физика капли дождя интересна и многогранна и не исчерпывается описанными выше явлениями. Здесь не были рассмотрены, например, эффекты роста капель из зародышей, влияние заряда на слияние капель при падении, возможное испарение капли по ходу движения или замерзание с образованием кристалликов льда и так далее.

БИБЛИО-ГЛОБУС
ВАШ ГЛАВНЫЙ КНИЖНЫЙ

МЫ ПРЕДЛАГАЕМ
БОЛЬШОЙ ВЫБОР ТОВАРОВ И УСЛУГ

УСЛУГИ	АССОРТИМЕНТ
<ul style="list-style-type: none"> ■ Интернет-магазин www.bgshop.ru ■ Кафе ■ Клубные (дисконтные) карты и акции ■ Подарочные карты ■ Предварительные заказы на книги ■ Встречи с авторами ■ Читательские клубы по интересам ■ Индивидуальное обслуживание ■ Подарочная упаковка ■ Доставка книг из-за рубежа ■ Выставки-продажи 	<ul style="list-style-type: none"> ■ Книги ■ Аудиокниги ■ Антиквариат и предметы коллекционирования ■ Фильмы, музыка, игры, софт ■ Канцелярские и офисные товары ■ Цветы ■ Сувениры

г. Москва,
м. Лубянка,
м. Китай-город
ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1
8 (495) 781-19-00
www.biblio-globus.ru
пн – пт 9:00 - 22:00
сб – вс 10:00 - 21:00
без перерыва на обед

www.biblio-globus.ru