Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Канунников, Две задачи о покрытии доски уголками,
Квант, 2020, номер 11, 38–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20201105>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 09:00:26

Две задачи о покрытии доски уголками

А.КАНУННИКОВ

ОДНА ИЗ РАСПРОСТРАНЕННЫХ кружковых тем – замощения, разрезания, раскраски. Типичная задача на эту тему формулируется так: «Можно ли данную фигуру, состоящую из клеток, разрезать на фигурки данного вида?» (см., например, [1]). В этой статье мы решим две схожие исследовательские задачи о покрытии прямоугольной доски уголками.

Задача 1. Доски каких размеров $m \times n$ можно разрезать на уголки из трех клеток?

Очевидно, что число клеток mn должно быть кратно 3, а значит, m или n кратно 3. Рассмотрим близкую задачу, в которой это ограничение снимается.

Задача 2. Доски каких размеров $m \times n$ можно покрыть уголками из трех клеток равномерно в несколько слоев? (Каждая клетка покрывается одним и тем же числом уголков.)

В ответе к этой задаче m и n уже могут быть не кратны 3 (в этом случае число слоев будет кратно 3). Интересное решение задачи 2 для доски 5×7 автор увидел в книжке [2], когда был школьником. Догадаться до этого решения весьма не просто.

Решение задачи 1

Будем считать, что m кратно 3. Начнем со случая $m = 3$. При $n = 2$ получаем прямоугольник 3×2 , который разрезается на два уголка. Исследуем общий случай доски $3 \times n$ при $n > 1$. Ее левую верхнюю клетку можно

Рис. 1

покрыть уголком двумя способами (рис.1) – в обоих случаях однозначно ставится еще один уголок снизу и эти два уголка образуют прямоугольник 3×2 . К оставшейся доске $3 \times (n - 2)$ применяем то же рассуждение и получаем, что

доска $3 \times n$ разрезается на уголки $\Leftrightarrow n$ четно. (1)

Далее возьмем $m = 6$. Доски 6×2 и 6×3 можно разрезать на блоки 3×2 , а значит – и на уголки (рис.2). Отсюда ясно, что

доска $6 \times n$ разрезается на уголки при любом $n > 1$. (2)

Рис. 2

Действительно, при четном n такая доска разрезается на доски 6×2 , а при нечетном n – на одну доску 6×3 и $(n - 3)/2$ досок 6×2 .

Осталось исследовать доски с нечетными m , $n > 3$, где m кратно 3. Наименьшие значения: $m = 9$ и $n = 5$. На разрезание доски 9×5 может уйти много неудачных попыток. В решении поможет раскраска доски, показанная на рисунке 3. Ясно, что каждый уголок покрывает не более чем одну зеленую клетку. С другой стороны, зеленых клеток 15 – столько же, сколько должно быть уголков. Значит, в каждом уголке должно быть по

Рис. 3

Рис. 4

зеленой клетке. Одно из разрезов показано на рисунке 4. Отсюда следует, что

любая доска $m \times n$ с нечетными $m, n > 3$, где m кратно 3, разрезается на уголки. (3)

Действительно, достаточно отпилить от такой доски доску $9 \times n$ и остаток разрезать на доски $6 \times n$ (всякое нечетное $m > 3$, кратное 3, представляется в виде $9 + 6 + \dots + 6$). Доски $6 \times n$ разрезаются в силу (2), а доска $9 \times n$ разбивается в соответствии с разбиением $n = 5 + 2 + \dots + 2$; доски 9×2 разрезаются на три блока 3×2 , а доску 9×5 мы только что разрезали.

Решение задачи 1 заключено в утверждениях (1)–(3). Сформулируем его в виде теоремы.

Теорема 1. Доска $m \times n$ разрезается на уголки в следующих случаях и только в них:

- 1) mn кратно 6 и $m, n > 1$;
- 2) mn кратно 3, m и n нечетны и больше 3.

Решение задачи 2

Прежде всего отметим, что любое покрытие одним слоем можно наслаивать многократно (столько раз, сколько нужно). Далее, помимо блока 2×3 у нас появляется еще блок 2×2 : такой квадратик покрывается четырьмя уголками в три слоя (рис. 5).

Рис. 5

Прямоугольниками 2×3 и 2×2 можно покрыть любую полосу $2 \times n$, а тогда и любую доску $2k \times n$. Итак,

доска $m \times n$, где mn четно ($m, n > 1$), равномерно покрывается уголками. (4)

Осталось исследовать доски с нечетными m и n . Как и в задаче 1, начнем со случая $m = 3$. Это первый нетривиальный случай, когда доказать невозможность покрытия не так просто. Пусть $n = 2k - 1$. Воспользуемся уже знакомой нам раскраской на рисунке 6 и расставим в зеленые клетки число 2, а в белые число -1 . Сумма всех чисел равна

ками, не расставляя числа. Рассмотрим, к примеру, доску 5×7 . Пусть ее можно покрыть уголками в N слоев. Тогда число зеленых клеток во всех слоях равно $12N$, а число уголков равно $35N/3$. Но в каждом уголке – не более одной зеленой клетки, значит, уголков не больше, чем зеленых клеток (по всем слоям), т.е. $12N < 35N/3$ – противоречие. Это решение рассказала преподаватель Малого мехмата Марина Молчанова.

Особого внимания заслуживает доска 7×7 . Если мы научимся покрывать ее, то

сможем покрывать
вообще все не рассмотренные
ранее доски $(7+2p) \times (7+2t)$. (8)

Достаточно показать, что, вырезав любую клетку доски 7×7 , мы сможем покрыть оставшуюся часть уголками в один слой. В самом деле, наложив друг на друга все 49 таких покрытий, мы покроем доску 7×7 в 48 слоев! Конечно, примеры покрытий достаточно привести не для 49 клеток, а всего для 10 – они отмечены на рисунке 7, любая

Рис. 7

другая клетка переводится в одну из отмеченных поворотом или отражением доски. Каждая из 10 клеток, отмеченных на рисунке 7, попадает в один из квадратов 2×2 , выделенных красным. После вырезания клетки такой квадрат сам становится уголком, а как разрезать оставшуюся часть доски, показано на соответствующем из рисунков 8, а–в.

Суммируя утверждения (4)–(8), получаем следующую теорему.

Теорема 2. Доска $m \times n$ равномерно покрывается уголками в следующих случаях и только в них:

- 1) mn четно и $t, n > 1$;
- 2) t, n нечетны и больше 3, кроме досок 5×5 и 5×7 .

Рис. 8

Литература

1. С. Табачников, Д. Фукс. Невозможные замощения. – «Квант», 2011, №2.
2. А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи. Как решать нестандартные задачи. – М.: МЦНМО, 2008.
3. П. А. Кожевников. Замощения: от шахматной раскраски до диаграмм Ван-Кампена и групп Конвея. – Материалы ЛШСМ-2013, <https://www.mccme.ru/dubna/2013/courses/kozhevnikov.htm>