Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Маркелов, А. Сайранов, Полимино, *Квант*, 2021, номер 1, 36–37

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20210102>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 15:21:51

ПОЛИМИНО

Ю.МАРКЕЛОВ, А.САЙРАНОВ

В этой статье мы обсудим решение задачи M2625. Но начнем с другой задачи, из варианта 7 класса Математического праздника 2018 года:

Существует ли такая фигура, что при любом выборе вида фигурок тетрамино (рис.1) эту фигуру можно составить,

Рис. 1

используя тетраминошки только выбранного вида? (Переворачивать тетраминошки можно.)

Оказывается, такая фигура существует (рис.2).

В фигуре из рисунка 2 есть дырка (т.е. фигура неодносвязна). И во всех примерах, найденных жюри, была дырка. Возникает гипотеза: *если для каждого типа тетрамино данную фигуру можно разбить на тетрамино этого типа, то в фигуре есть дырка*. Мы докажем более сильное утверждение (которое и составляет задачу M2625): *если фигуру можно разрезать как на фигуры типа O, так и на фигуры типа Z, то в ней есть дырка*.

Рис. 2

Рис. 3

Рис. 4

Замечание. Не сложно видеть, что фигур, которые можно разрезать как на тетраминошки типа O, так и на тетраминошки типа Z, бесконечно много. Например, можно взять фигуру из рисунка 3 и склеивать копии этой фигуры друг с другом (рис.4).

Но есть и другие примеры (см. рис.2 и 5).

Пусть существует фигура Φ без дырок, которую можно разделить и на фигурки типа O, и на фигурки типа Z.

Раскрасим клетки фигуры Φ в черный и белый цвета в шахматной раскраске. Рассмотрим фиксированное разбиение фигуры Φ на фигурки типа O и разбиение на фигурки типа Z. В любой фигурке типа O или фигурке типа Z будет ровно две черные и ровно две белые клетки. Соединим в каждой фигурке типа O и в каждой фигурке типа Z центры черных клеток отрезком. Рассмотрим объединение всех таких отрезков. Из каждой черной клетки выходит ровно два отрезка (в некоторых случаях они могут совпадать), поэтому наше множество отрезков будет состоять из циклов. Назовем это множество отрезков *черным* разбиением. Аналогичную конструкцию для белых клеток назовем *белым* разбиением (рис.5).

Докажем, что в черном разбиении или в белом разбиении найдется цикл длины больше 2. В разбиении есть цикл длины 2, если есть фигурка типа O и фигурка типа Z, в пересечении которых две одноцветные клетки. Пусть в белом разбиении все циклы имеют длину 2. Тогда рассмотрим какую-нибудь фигурку O_1 типа O. Существует фигурка Z_1 типа Z, которая содержит две белые клетки фигурки O_1 . Но

Рис. 5

тогда фигурка Z_1 содержит ровно одну из черных клеток фигурки O_1 . Значит, из соответствующей клетки в черном разбиении отрезки идут в разные клетки. Они и порождают цикл длины больше 2.

Далее мы докажем, что внутри любого цикла длины больше 2 обязательно будет дырка. Не умаляя общности, будем считать, что цикл длины больше 2 есть в черном разбиении. Назовем *внутренней* фигурку типа O из разбиения, целиком лежащую внутри нашего цикла. Назовем *граничной* фигурку типа O из разбиения, две черные клетки которой принадлежат выбранному нами циклу. Отрезки в цикле чередуются: после отрезка, соединяющего черные клетки фигурки типа O , идет отрезок, соединяющий черные клетки фигурки типа Z , значит, длина нашего цикла равна $2k$, где $k \in \mathbb{N}$. Обозначим количество черных и белых клеток, лежащих строго внутри нашего цикла, через b и w соответственно. Любая черная клетка внутри цикла принадлежит внутренней фигурке типа O , любая белая клетка внутри цикла принадлежит либо граничной фигурке типа O , либо внутренней. Всего есть k граничных фигурок, и каждой из них принадлежит ровно одна внутренняя белая клетка. С другой стороны, всем внутренним фигуркам типа O принадлежит ровно b черных клеток, а значит, и ровно b белых клеток. Таким образом, $w = b + k$.

Теперь посчитаем соотношение между b и w иным способом. Рассмотрим новую сетку. Узлами новой сетки будут центры бывших черных клеток. Центрами новых клеток будут центры бывших белых кле-

ток. Тогда наш цикл – фигура, идущая по линиям новой сетки. Количество внутренних узлов сетки равно количеству старых внутренних черных клеток, т.е. b . Количество узлов на границе – это длина цикла, т.е. $2k$. Теперь посчитаем по формуле Пика (см. [1] и [2]) площадь нашей фигуры: $S = b + 2k/2 - 1 = b + k - 1$. Но площадь новой фигуры – это количество внутренних центров новых клеток, т.е. количество старых белых клеток внутри цикла. Откуда заключаем, что $w = S = b + k - 1$. Противоречие.

Из предположения об отсутствии дырок внутри данного цикла мы пришли к противоречию. Значит, в любом цикле будет хотя бы одна дырка.

Замечание. Из доказательства следует даже более сильное утверждение: в фигуре, которую можно разрезать и на тетраминошки типа O , и на тетраминошки типа Z , существует дырка нечетной площади. В качестве такой дырки можно выбрать ту, которая не содержит внутри себя других связанных компонент нашей фигуры. Попробуйте самостоятельно модифицировать доказательство для этого случая, выведя условие на количество черных и белых клеток внутри такой дырки.

Литература

1. Г. Мерзон. Формула Пика и тающий лед. – «Квант», 2018, №9.
2. Н. Васильев. Вокруг формулы Пика. – «Квант», 1974, №12.