Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Бакаев, Задача Произволова о сумме модулей, *Квант*, 2021, номер 1, 44–49

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20210105>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 17:01:06

уже понимаете, как это делается). Проведем численные оценки. При $D = 10^{-9} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$, $L = 10^{-2} \text{ м}$, $u = 150 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, т.е. при $D \ll uL$, получаем $p = \omega Ds / (VnuL)$. Поведение ответа по ω , D , S – правильное; по uL , стремящемся к нулю, натывается на D ; по Vn , стремящемся к нулю, натывается на ограничение $p \leq C$. Численная оценка при $\omega = 6 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ (20°C), $S = 10^{-3} \text{ м}^2$, $V = 50 \text{ м}^3$, $n = 5 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ дает $p \approx 1,6 \cdot 10^{-15} \text{ кг/м}^3$ при предельно допустимой концентрации $3 \cdot 10^{-10} \text{ кг/м}^3$. Таким образом, даже более тонкий слой воды защищает надежно, если, конечно, $n \neq 0$, т.е. у нас помещение с каким-то, хоть плохоньким, но

воздухообменом, а не банка с глухой крышкой. Заметим, что без воды, при $L = 0$, концентрация $p \approx 2,4 \cdot 10^{-6} \text{ кг/м}^3$, а это уже 10^4 предельной – недопустимая ситуация.

Ну и еще посмотрим, за какое время установится равновесие в системе вода-ртуть. Слой воды площадью S и толщиной L с концентрацией ртути на одной границе C , а на другой много меньшей содержит количество ртути $CSL/2$. Это количество поставляется в слой воды потоком NS за искомое время $t = CL/(2N)$. Подставляя выражения для C и N , приведенные выше, получаем $t = L^2/(2D)$. Эта формула позволяет быстро оценивать время диффузионных процессов. В данном случае $t \approx 14$ часов.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Задача Произволова о сумме модулей

Е. БАКАЕВ

Разобьем числа от 1 до 10 на две группы по 5 чисел. Например, так:

6, 2, 3, 9, 7
1, 5, 4, 8, 10

Упорядочим числа в первой строке по возрастанию, во второй – по убыванию и выпишем разности чисел, стоящих в одном столбце:

2, 3, 6, 7, 9
10, 8, 5, 4, 1
разности – 8, 5, 1, 3, 8

Найдем сумму разностей: $8 + 5 + 1 + 3 + 8 = 25$.

Сделаем те же действия, но разобьем числа каким-нибудь другим способом (и снова упорядочим):

1, 5, 6, 8, 9
10, 7, 4, 3, 2
разности – 9, 2, 2, 5, 7

Снова найдем сумму разностей: $9 + 2 + 2 + 5 + 7 = 25$. Опять получилось 25, и это не

случайное совпадение – такой ответ будет получаться при любых разбиениях чисел на две группы.

Это утверждение (точнее, его обобщение для произвольного четного количества чисел) – задача Вячеслава Викторовича Произволова со Всесоюзной олимпиады школьников 1985 года. Мы разберем ее решение и попутно обсудим другие задачи, в том числе встречавшиеся на олимпиадах. Начнем с такой.

Задача 1 (А. Шаповалов, Всероссийская олимпиада, 1998). *На столе лежали две колоды, по 36 карт в каждой. Первую колоду перетасовали и положили на вторую. Затем для каждой карты первой колоды посчитали количество карт между ней и такой же картой второй колоды (т.е. сколько карт между семерками червей, между дамами пик и так далее). Чему равна сумма 36 полученных чисел?*

Решение. Если порядок карт в колодах одинаковый, то между какой-то картой одной колоды и такой же картой другой колоды находится 35 карт, значит, сумма всех 36 чисел равна $35 \cdot 36 = 1260$. (Если карт в колодах не по 36, а по n , то аналогично получим ответ $(n-1)n$.) Докажем, что сумма будет такой при любом расположении карт.

Первый способ. Используем прием, который часто помогает, когда надо доказать, что

какое-то свойство выполняется для произвольной конфигурации. (В данном случае свойство – что сумма всегда равна 1260.) Докажем два утверждения:

1. Если поменять местами две любые карты одной колоды, то сумма не изменится.

2. Такими преобразованиями можно свести любую ситуацию к конкретному частному случаю – когда порядок карт в колодах одинаковый.

Тогда в любой конфигурации (т.е. при любом расположении карт в колодах) сумма будет такой же, как в частном случае, – и ее мы уже сосчитали.

Убедимся в верности утверждения 1. Пусть мы меняем местами карты *A* и *B* второй колоды (рис.1). Тогда из 36 сумм меняются

Рис. 1

только две – количества карт между картами *A* и между картами *B*. Несложно видеть, что сумма этих двух количеств не меняется.

Утверждение 2 также несложно доказать. Пронумеруем все карты колоды. Можно попарно менять карты местами так, чтобы карты шли в порядке возрастания. Сначала добьемся того, чтобы первая карта была на первом месте, затем последовательно – чтобы вторая на втором, третья – на третьем и т.д.

Итак, задача решена. В конце статьи мы приводим еще несколько задач, в которых помогает рассмотренный прием – элементарными перестановками сводим конфигурацию к частному случаю и показываем, что при этом некоторое свойство не меняется (является инвариантом). Отметим, что хоть мы и решили задачу, но нельзя сказать, что мы хорошо разобрались в устройстве этой конструкции.

Второй способ. Идея решения в следующем. Давайте при каждом подсчете количества карт между двумя одинаковыми картами обращать внимание на то, сколько из них лежит в первой колоде, а сколько – во второй.

Рассмотрим пример (рис.2). Обозначим одинаковые карты одинаковыми буквами. В

Рис. 2

примере получилось, что «синие части» (количества карт, лежащих в первой колоде) рассматриваемых сумм равны 0, 1, 2, 3, 4 и «красные части» (карты второй колоды) равны тем же числам. Так будет получаться и в других случаях: если карт в каждой колоде по n , от первой карты первой колоды до границы между колодами лежит $n - 1$ карт, от второй до этой границы $n - 2$ карты и т.д., от последней карты первой колоды до границы 0 карт. Таким образом, искомая сумма разбивается на две суммы чисел от 0 до $n - 1$. Поэтому ответ

$$(0 + 1 + \dots + (n - 1)) \cdot 2 = (n - 1)n.$$

Сформулируем теперь лемму, утверждение которой очень похоже на утверждение предыдущей задачи.

Лемма 1. На прямой отмечено $2n$ точек, расстояние между соседними точками равно 1. Первые n точек пронумеровали числами от 1 до n в каком-то порядке. Последние n точек также пронумеровали числами от 1 до n в каком-то порядке. Точки с одинаковыми номерами соединили отрезками. Докажите, что сумма длин отрезков равна n^2 .

Доказательство этой леммы точно такое же, как решение предыдущей задачи. Ответ получается иным за счет того, что «расстояние» между двумя картами считалось как количество карт между ними, а расстояние между двумя точками на 1 больше количества точек между ними, поэтому и ответ получается на n больше.

Лемма 2. На прямой отмечено $2n$ точек, расстояние между соседними точками равно 1. Точки разбили на n пар и в каждой паре две точки соединили отрезком. Тогда:

а) наибольшее возможное значение суммы их длин равно n^2 ;

б) оно достигается только при таких разбиениях на пары, как в предыдущей задаче (т.е. когда в каждой паре точки находятся в разных половинах).

Доказательство леммы 2. Первый способ. Рассмотрим произвольную конфигурацию

(т.е. разбиение точек на пары) с наибольшей суммой; это можно сделать, потому что конфигураций конечное число. Заметим, что в такой конфигурации не может быть двух непересекающихся отрезков. Действительно, если отрезки AB и CD не пересекаются (рис.3), то если их заменить на отрезки AC

Рис. 3

и BD или же на AD и BC , то сумма длин отрезков увеличится, чего произойти не может.

Таким образом, в конфигурации с наибольшей суммой любые два отрезка пересекаются. Покажем, что тогда все отрезки пересекаются. Для этого докажем следующую лемму.

Лемма 3. На прямой дано несколько отрезков, любые два из которых пересекаются. Тогда все отрезки имеют общую точку.

Это утверждение не такое очевидное, как может показаться, — в других ситуациях, похожих на эту, аналогичное утверждение бывает и неверным. Пример такой ситуации приведен в упражнении 2.

Доказательство леммы 3. Рассмотрим середину — промежуток между точками с номерами n и $n+1$ (точки по-прежнему пронумерованы по порядку числами от 1 до $2n$). Покажем, что она содержится во всех отрезках. Посмотрим, как расположены левые и правые концы отрезков. Если слева от середины не все концы являются левыми (рис.4), то слева есть правый конец какого-то отрезка, а справа есть левый конец какого-то отрезка. Тогда эти два отрезка не пересекаются. Значит, слева все концы левые, а справа все концы правые (рис.5).

Таким образом, все отрезки содержат середину, и лемма 3 доказана, а тем самым доказана и лемма 2.

Рис. 4

Рис. 5

Упражнения

1. Докажите, что если целиком слева от середины лежит k отрезков, то и целиком справа от середины лежит k отрезков.

2. На плоскости расположены прямоугольники так, что любые два прямоугольника имеют общую точку. а) Можно ли утверждать, что все прямоугольники имеют общую точку? б) А если добавить условие, что стороны прямоугольников параллельны осям координат?

Продолжение доказательства леммы 2.

Второй способ. Рассмотрим промежуток между первой и второй точками. Он входит только в один отрезок. Промежуток между второй и третьей точками входит не более чем в два отрезка, потому что слева от него только две точки. И так далее: рассмотрим промежуток между точками с номерами k и $k+1$ (рис.6). Он входит не более чем в k отрезков, потому что только те точки, которые слева от него, могут быть левыми концами отрезков, содержащих этот промежуток.

Рис. 6

Рис. 7

Аналогично, рассматривая правые концы, можно сказать, что этот промежуток входит не более чем в $n-k$ отрезков. (Для примера на рисунке 7 написано, в какое наибольшее количество отрезков может входить каждый промежуток при $n=5$.)

Суммируя оценки того, сколько раз может быть посчитан каждый из этих единичных отрезков, получим $1+2+\dots+(n-1)+n+(n-1)+\dots+2+1=n^2$.

Упражнение 3. Завершите доказательство, показав, что все складываемые здесь неравенства обращаются в равенства ровно в тех случаях, когда все отрезки содержат середину.

Третий способ. Пусть номера (координаты) концов i -го отрезка — это a_i и b_i , где $a_i > b_i$. Тогда его длина равна разности $a_i - b_i$. Сложим все длины отрезков: $a_1 - b_1 + a_2 - b_2 + \dots + a_n - b_n$. В этой сумме присутствуют все числа $1, 2, \dots, 2n$ по одному разу, половина со знаком плюс, половина со знаком минус. Чтобы сумма была наибольшей, понятно, что с плюсом надо взять наиболь-

шие числа, а с минусом наименьшие! Таким образом, мы понимаем, что левыми концами должны быть n левых точек, а правыми концами – n правых точек.

В конце статьи приведены еще несколько задач про модули разностей и суммы расстояний на прямой, решить которые помогают схожие соображения.

* * *

Заметим, что лемму 2 можно обобщить следующим образом.

Лемма 4. На прямой отмечено $2n$ точек (расстояние между соседними точками может быть различным!). Точки разбили на n пар и в каждой паре две точки соединили отрезком. Тогда наибольшее возможное значение суммы их длин достигается тогда и только тогда, когда все отрезки пересекают середину (промежуток между двумя средними по порядку точками).

Убедитесь, что все те же три доказательства леммы 2 работают и для леммы 4!

Упражнение 4. Сколькими способами можно провести эти n отрезков так, чтобы все они пересекали середину?

Следующую задачу мы оставим для самостоятельного решения.

Задача 2 (И.Измestьев, Всероссийская олимпиада, 1996). На прямой отмечены 1996 точек.¹ Петя раскрашивает половину из них в красный цвет, а остальные – в синий. Затем Вася разбивает их на пары красная–синяя так, чтобы сумма расстояний между точками в парах была максимальной. Докажите, что этот максимум не зависит от того, какую раскраску сделал Петя.

* * *

Обсудим теперь задачу, где помогает доказанная нами лемма 2.

Задача 3 (А.Грибалко, Турнир математических боев имени А.П.Савина, 2018). Ладья обошла все клетки шахматной доски по одному разу, чередуя горизонтальные и вертикальные ходы, и вернулась на исходную клетку. Какой наибольший по длине

путь она могла при этом пройти? (Мы считаем, что если ладья делает ход, например, с поля $a2$ на поле $a5$, то она при этом не посещает клетки $a3$ и $a4$. Длиной такого прыжка считаем расстояние между центрами полей, в данном примере оно равно 3.)

Решение. Рассмотрим произвольный ряд (строчку или столбец). Прыжков, начало и конец которых лежат в этом ряду, было ровно четыре (рис.8). Таким образом, клет-

Рис. 8

ки этого ряда разбиваются на пары, между которыми проводился прыжок. По лемме 2, сумма длин таких прыжков не превышает $4^2 = 16$. Всего рядов 16 (8 строк и 8 столбцов), длина прыжков в каждом из них не больше 16, значит, суммарная длина прыжков не больше $16 \cdot 16 = 256$.

Осталось привести пример. В таком примере в каждом ряду должна достигаться максимальная сумма длин, а для этого каждый прыжок должен проходить через середину соответствующего ряда, т.е. через одну из средних линий доски (рис.9). Это сообра-

Рис. 9

жение помогает догадаться, как придумать пример. В каждую клетку записываем ее номер в порядке обхода доски ладьей. Можно сначала заполнить строки 1 и 5 (рис.10), после чего аналогичным образом заполняют-

1	5	9	13	2	6	10	14
16	4	8	12	3	7	11	15

Рис. 10

¹ На самой олимпиаде в условии задачи было добавлено, что точки отмечены через равные промежутки.

ся строки 2 и 6, потом 3 и 7, потом 4 и 8, и в итоге ладья возвращается на клетку, с которой начинала.

Наконец мы готовы решить задачу, о которой шла речь в самом начале.

Задача 4 (В.Произволов, Всесоюзная олимпиада школьников, 1985). *Первые $2n$ натуральных чисел разбиты на два множества по n чисел в каждом. Пусть $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ – числа первого множества, расположенные в порядке возрастания, а $b_1 > b_2 > \dots > b_n$ – числа второго множества, расположенные в порядке убывания. Докажите равенство*

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_n - b_n| = n^2.$$

Решение. Модуль разности $(a_i - b_i)$ – это длина отрезка между точками с координатами a_i и b_i . Рассмотрим точки с координатами $1, 2, \dots, 2n$ на прямой. Тогда, по лемме 2, равенство достигается тогда и только тогда, когда все такие отрезки пересекают середину. Иными словами, осталось доказать, что для каждого i точки с координатами a_i и b_i лежат по разные стороны от середины.

Посмотрим, как расположены точки типов a и b относительно середины. Если слева от середины находится k точек типа a , то слева от середины находится $n - k$ точек типа b , значит, справа от середины – оставшиеся k точек типа b . Таким образом, сколько точек типа a слева от середины, столько и точек типа b справа от середины! Тогда при $i \leq k$ точка a_i находится слева от середины, а b_i – справа; при $i > k$ – наоборот.

Задача решена.

Напоследок приведем одну сложную задачу В.Произволова про сумму модулей.

Задача 5. *Произвольные $m + k$ различных чисел разбили на две группы из m и k чисел и в каждой группе расположили их в порядке возрастания:*

$$a_1 < a_2 < \dots < a_m, \quad b_1 < b_2 < \dots < b_k.$$

Затем те же $m + k$ чисел снова разбили на две группы из m и k чисел и в каждой группе опять расположили в порядке возрастания:

$$c_1 < c_2 < \dots < c_m, \quad d_1 < d_2 < \dots < d_k.$$

Докажите равенство

$$|a_1 - c_1| + |a_2 - c_2| + \dots + |a_m - c_m| = |b_1 - d_1| + |b_2 - d_2| + \dots + |b_k - d_k|.$$

Решение этой задачи, а также много других интересных задач можно найти в книге В.В.Произволова «Задачи на вырост». Очень рекомендуем ее к изучению. Скачать книгу можно в интернете:

<https://math.ru/lib/501> (издание 1995 года) и https://www.mathedu.ru/text/proizvolov_zadachi_na_vyrost_2003/ (издание 2003 года).

В заключение предлагаем еще несколько задач для самостоятельного решения.

Сведение к частному случаю

Вот небольшая подборка задач, которые удобно решать способом, разобранным в первом решении задачи 1: сведением к частному случаю элементарными преобразованиями.

6. В ряд стоят m мальчиков и d девочек в каком-то порядке. Каждого ребенка спросили, сколько слева от него стоит детей другого пола. Чему равна сумма чисел, названных детьми?

Указание. Докажите два утверждения:

1. Если поменять местами мальчика и девочку, то сумма чисел не изменится.

2. Такими действиями можно привести ситуацию к простому частному случаю: когда сначала

стоят только девочки, а потом только мальчики. Для него посчитать сумму нетрудно.

7 (Г.Гальперин). В каждой вершине куба стоит число $+1$ или -1 . В центре каждой грани куба поставлено число, равное произведению чисел в вершинах этой грани. Может ли сумма получившихся 14 чисел оказаться равной 0?

Указание. Посмотрите, как изменится сумма, если поменять знак числа в вершине.

8 (Е.Бакаев, Турнир городов, 2013). Двадцать детей – десять мальчиков и десять девочек – встали в ряд. Каждый мальчик сказал, сколько детей стоит справа от него, а каждая девочка – сколько детей стоит слева от нее. Докажите, что сумма чисел, названных мальчиками, равна сумме чисел, названных девочками.

9 (Е.Бакаев, Турнир городов, 2014). На столе лежала кучка серебряных монет. Каждым действием либо добавляли одну золотую монету и записывали количество серебряных монет на первый листок, либо убрали одну серебряную монету и записывали количество золотых монет на второй листок. В итоге на столе остались только золотые монеты. Докажите, что в этот момент сумма всех чисел на первом листке равнялась сумме всех чисел на втором.

10 (В.Произволов, М1181). На шахматной доске расставлены 8 ладей так, что они не бьют друг друга. Докажите, что на черных полях расположено четное число ладей.

Задачи про модули разностей и суммы расстояний на прямой

11. Вдоль прямой дороги стоят семь домов (не обязательно на равном расстоянии друг от друга). Где нужно вырыть колодец, чтобы сумма расстояний от него до домов была наименьшей?

(Решение этой задачи и еще много задач школьного типа на эту тему можно найти в статье А.Блинкова «Расстояния на прямой и не только» в «Кванте» №3 за 2012 год.)

12 (В.Произволов). Имеется 19 гирек массой 1 г, 2 г, 3 г, ..., 19 г. Девять из них – железные, девять – бронзовые и одна – золотая. Известно, что общая масса всех железных гирек на 90 г больше, чем общая масса бронзовых. Найдите массу золотой гири.

13. У Леши были записаны в тетрадь числа от 1 до 10. Леша решил зачеркивать числа по два, записывая вместо них разность (возможно, отрицательную) до тех пор, пока у него не останется

одно число – Результат. На какой наибольший Результат может рассчитывать Леша?

14 (В.Произволов). По кругу расставлены 10 железных гирек. Между каждыми соседними гирьками находится бронзовый шарик. Масса каждого шарика равна разности масс соседних с ним гирек. Докажите, что шарики можно разложить на две чаши весов так, чтобы весы уравнились.

15 (В.Произволов). Скупая в отсутствие покупателей, продавец расположил набор из ста гирек массами 1, 2, 3, ..., 100 граммов в произвольном порядке: $m_1, m_2, \dots, m_{100}$. Покупатель заявил, что гирьки массами $|m_1 - 1|, |m_2 - 2|, \dots, |m_{100} - 100|$ можно расположить на двух чашах весов так, что они окажутся в равновесии. Он сумел это доказать, не прибегая к взвешиваниям. Докажите и вы.

16 (А.Шень, Турнир городов, 1995). Кресла для зрителей вдоль лыжной трассы пронумерованы по порядку: 1, 2, 3, ..., 1000. Кассирша продала n билетов на все первые 100 мест, но n больше 100, так что на некоторые места она продала больше одного билета (при этом $n < 1000$). Зрители входят на трассу по одному. Каждый, подойдя к своему месту, занимает его, если оно свободно, если же занято, говорит «Ох!», идет в сторону роста номеров до первого свободного места и занимает его. Каждый раз, обнаружив очередное место занятым, он говорит «Ох!». Докажите, что все рассядутся и что число «охов» не зависит от того, в каком порядке зрители выходят на трассу.

Задача 17. Клетки шахматной доски произвольным образом пронумерованы числами от 1 до 64. На доске стоит 63 коня, номер каждого совпадает с номером клетки, на которой он стоит; клетка номер 64 пуста. Этими конями сделали несколько ходов, после чего клетка 64 вновь оказалась пустой. Обозначим через n_k номер клетки, на которой оказался конь под номером k . Докажите, что наибольшее возможное значение выражения $\sum_{k=1}^{63} |n_k - k|$ равно 1984.

Эта задача, задуманная как предложение от Румынии на олимпиаду IMO–1984, взята из книги «Mathematical miniatures» (Т.Andreescu, S.Savchev, 2003, глава которой «The «Arbitrary» Proizvolov» также посвящена задаче 4.)