Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Грибалко, А. Заславский, О. Манжина, О взвешивании весов, *Квант*, 2021, номер 2, 24–28

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20210203>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 15:28:32

Рис. 2

Результат аппроксимации табличных данных этой линейной зависимостью представлен графиком на рисунке 2. Коэффициент $\alpha = 0,064 \text{ 1/}^\circ\text{C}$. Производная давления по температуре равна

$$\frac{dp_{\Pi}}{dT} = \frac{dp_{\Pi}}{dt} = \alpha p(0) \cdot e^{\alpha t}.$$

В итоге получаем формулу чувствительности нашего термометра:

$$\frac{dh}{dT} = \frac{1}{\rho g} \left(\frac{p}{T} + \alpha p(0) \cdot e^{\alpha t} \right).$$

Сделаем численную оценку двух составляющих при температуре 30°C :

$$\frac{1}{\rho g} \frac{p}{T} = \frac{10^5 \cdot 10^2}{10^3 \cdot 10 \cdot 303} \text{ см/}^\circ\text{C} \approx 3,3 \text{ см/}^\circ\text{C},$$

Рис. 3

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho g} \alpha p(0) \cdot e^{\alpha t} &= \\ &= \frac{0,064}{10^3 \cdot 10} \cdot 4,58 \cdot 10^{-3} \cdot 13,6 \cdot 10^3 \cdot 10 \times \\ &\quad \times e^{0,046 \cdot 30} \cdot 10^2 \text{ см/}^\circ\text{C} \approx 2,72 \text{ см/}^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

Суммарная чувствительность при 30°C равна

$$\frac{dh}{dT} \approx 3,3 \text{ см/}^\circ\text{C} + 2,7 \text{ см/}^\circ\text{C} = 6,0 \text{ см/}^\circ\text{C}.$$

Эти результаты показывают хорошую чувствительность термометра и приближенное равенство двух ее составляющих. При этом «паровая» составляющая нелинейная. В заключение приводим график зависимости чувствительности паровоздушного термометра от температуры (рис.3).

О ВЗВЕШИВАНИИ ВЕСОВ

**А.ГРИБАЛКО, А.ЗАСЛАВСКИЙ,
О.МАНЖИНА**

В «Кванте» №11–12 за 2020 год опубликована следующая задача.

М2628. Имеется n внешне одинаковых чашечных весов. Известно, что ровно одни из них испорченные – они показывают что угодно, и их вес отличается от веса остальных, которые весят одинаково-

во и всегда показывают верный результат. За одно взвешивание можно положить несколько весов на каждую из чаш каких-то других весов. При каком наибольшем n за три взвешивания можно гарантированно найти испорченные весы?

Заметим, что это не первая задача о взвешивании весов. Еще в 2002 году на Турнире имени А.П.Савина была предложена такая задача.

Задача 1 (А.Чеботарев, Т.Караваяева, В.Гуровиц). У завхоза было трое одинаковых чашечных весов. В одних из них потерялась часть деталей, и теперь при взвешивании на них они могут выдать любой результат. Как найти неисправные весы за два взвешивания?

Эта задача совсем простая, и мы оставляем ее решение читателю. Несколько сложнее следующая задача.

Задача 2 (С.Токарев). *При каком наибольшем n можно за k взвешиваний гарантированно найти среди n весов более легкие неисправные весы?*

Ответ: при $n = 3^k - 2$.

Решение. Пусть при первом взвешивании на каждую чашу весов A ставится по x других весов и еще y весов остается. Тогда если одна из чаш перевесит, то неисправными могут быть либо весы на другой чаше, либо весы A , т.е. всего остается $x + 1$ подозрительных весов. Аналогично, если в первом взвешивании получено равновесие, то остается $y + 1$ подозрительных весов. Поскольку в обоих случаях появляются заведомо исправные весы, все дальнейшие взвешивания можно проводить на них, как в стандартной задаче поиска фальшивой монеты. Соответственно, необходимым и достаточным условием возможности найти неисправные весы за оставшиеся $k - 1$ взвешиваний будет выполнение неравенств $x + 1 \leq 3^{k-1}$, $y + 1 \leq 3^{k-1}$, что и дает приведенный выше ответ.

Интересно также, что если разрешить сложные взвешивания, при которых на чаши одних весов ставится по несколько других весов, на чаши которых также ставятся весы, и т.д. (в одном сложном взвешивании получаются результаты со всех участвующих в них весов, кроме тех, на чашах которых ничего не стоит), то двух взвешиваний достаточно, чтобы найти одни неисправные весы среди любого количества весов, большего двух. Описание алгоритма для произвольного n довольно сложно, поэтому ограничимся примером для $n = 15$.

Поставим на чаши весов A весы B_1 и B_2 , затем на чаши весов B_1 поставим весы C_1 и C_2 , а на чаши весов B_2 — весы C_3 и C_4 , наконец, на чаши весов C_1 , C_2 , C_3 , C_4 поставим соответственно весы D_1 и D_2 , D_3 и D_4 , D_5 и D_6 , D_7 и D_8 . Очевидно, что если весы A показывают равновесие, то они и будут неисправными. В противном случае все весы на более тяжелой чаше, пусть это чаша с весами B_2 , правильные, тогда по-

смотрим на показания весов B_1 . Аналогично получаем, что все весы на перевесившей чаше (а при равновесии на обеих) этих весов заведомо правильны, и смотрим показания весов на другой чаше, пусть это весы C_1 . Снова получаем, что неисправными могут быть только более легкие из весов D_1 , D_2 , т.е. после первого взвешивания остается не более четырех подозрительных весов. Определить следующим взвешиванием, какие из них неисправны, не представляет труда.

Решение задачи M2628. Отличие задачи M2628 в том, что неизвестно, в какую сторону вес испорченных весов отличается от веса правильных. Как мы увидим, это делает задачу существенно труднее.

Ответ: при $n = 13$.

Предположим, что испорченные весы можно найти за три взвешивания при каком-нибудь $n \geq 14$. Понятно, что при любом взвешивании нет смысла сравнивать разные количества весов, иначе чаша с большим числом весов перевесит и это не даст никакой информации.

После каждого взвешивания все весы будут разбиты на две группы: в одной будут заведомо настоящие, во второй — подозрительные, про которые пока непонятно, настоящие они или нет. Докажем, что нет смысла проводить второе и третье взвешивания на подозрительных весах. Допустим, мы сделали такое взвешивание на весах X . Поменяем местами их с какими-нибудь настоящими (не важно, где они находятся, на весах или нет). Если X настоящие, то результат взвешивания не изменится. Если же X испорченные, то они могли показывать такой же результат, как и после замены. Значит, в любом случае набор подозрительных весов либо останется прежним (в том числе не изменится информация, легче или тяжелей могут быть каждые из весов), либо из него будут удалены весы X . Таким образом, можно считать, что второе и третье взвешивания проводились на настоящих весах.

Если при первом взвешивании мы положили на каждую чашу не более четырех весов, то рассмотрим случай, когда было

равновесие. В этом случае весы на чашах настоящие, а подозрительными являются те, на которых проводили взвешивание, и не менее $n - 9$ не участвовавших в нем, т.е. всего не меньше шести весов. Значит, есть не менее 12 возможностей того, какие это весы и в какую сторону их вес отличается от настоящих. Во втором и в третьем взвешиваниях должны участвовать все подозрительные весы, кроме, может быть, одних, иначе мы не сможем отличить двое весов, не участвовавших во взвешиваниях, а испорченные могут оказаться среди них. Это значит, что после второго и третьего взвешиваний мы максимум у одних весов не смогли бы узнать, легче или тяжелей они настоящих, т.е. должны уметь различать не менее 11 ситуаций. Однако каждое взвешивание может иметь максимум три исхода, поэтому более девяти различных ситуаций мы различить не сможем.

Если же при первом взвешивании мы сравнивали не менее чем по пять весов с каждой стороны, то может оказаться, что одна из чаш перевесила. Тогда число подозрительных весов после первого взвешивания больше девяти и различить их за два взвешивания не получится.

Теперь покажем, как за три взвешивания найти испорченные весы при $n = 13$. Как понятно из оценки, первым взвешиванием нужно положить на чаши некоторых весов по четверо весов.

Если весы оказались в равновесии, то на них сравнивались настоящие весы, а подозрительными являются те, на которых проводилось взвешивание, и четверо весов, не участвовавших в нем. Для второго взвешивания возьмем настоящие весы, на одну их чашу положим трое настоящих весов, а на другую – трое подозрительных. Если подозрительные оказались легче или тяжелей, то испорченные весы среди них и мы знаем, в какую сторону их вес отличается от настоящих. Тогда, сравнив третьим взвешиванием любые двое из них на настоящих весах, мы выявим испорченные. Если же при втором взвешивании весы показали равновесие, то испорченные весы среди двух оставшихся подозрительных. Тогда сравним на настоящих весах одни из них с

настоящими и выясним, какие именно являются испорченными.

Если при первом взвешивании перевесила одна из чаш, то подозрительные весы либо на ней и они тяжелей настоящих (будем называть все весы на этой чаше тяжелыми), либо на другой чаше и они легче (будем называть их легкими), либо те, на которых проводили взвешивание. Для второго взвешивания возьмем настоящие весы, на одну их чашу положим двое тяжелых весов и двое легких, а на другую – одни тяжелые, одни легкие и двое настоящих. Если одна из чаш перевесила, например первая, то подозрительными остаются двое тяжелых весов на ней и легкие на другой чаше. Тогда сравним двое подозрительных тяжелых весов на настоящих весах и либо обнаружим испорченные весы среди них, либо это будут подозрительные легкие. Аналогично разбирается случай, если при втором взвешивании перевесила вторая чаша. Если же весы показали равновесие, то взвешиваемые весы настоящие, а подозрительными остаются трое весов. Третьим взвешиванием сравним на настоящих весах оставшиеся подозрительные тяжелые и легкие весы на одной чаше с двумя настоящими на другой. В случае неравенства в зависимости от результата понятно, какие из них испорченные, а в случае равенства испорченными являются те, на которых проводилось первое взвешивание.

Следует, однако, отметить, что, в отличие от большинства задач на взвешивания, в этой задаче число весов ограничено не только сверху, но и снизу. Так, при $n = 3$ никакое число взвешиваний не гарантирует нахождения неисправных весов!

Действительно, пусть, например, весы A и B правильные, весы C неисправные и более тяжелые, а при взвешивании на них получилось, что $A > B$. Сделав взвешивания на других весах (больше делать все равно нечего), мы получим также, что $C > A$ и $C > B$. Такую же систему неравенств мы могли бы получить, если бы весы B были неисправными и более легкими.

Теперь единственное, что нам остается, это повторять взвешивания на подозре-

тельных весах B и C , надеясь на то, что когда-нибудь неисправные весы покажут результат, отличный от предыдущего (повторять взвешивания на правильных весах A не имеет смысла, поскольку результаты этих взвешиваний меняться не будут). Теоретически это может вообще никогда не произойти, но, если, например, неисправные весы выдают любой из трех исходов с равными вероятностями, то вероятность повторения результата первого взвешивания в m последующих равна $1/3^m$, что стремится к нулю с ростом m . Поэтому рано или поздно неисправные весы будут найдены. Тогда возникает естественный вопрос о среднем числе нужных для этого взвешиваний или следующая задача.

Задача 3. Среди трех весов одни испорчены и отличаются от остальных по весу. При взвешивании на испорченных весах все три исхода равновероятны. Сколько в среднем взвешиваний надо сделать, чтобы найти испорченные весы?

Ответ: 37/9.

Решение. Нетрудно убедиться, что после трех взвешиваний на разных весах подозрительных весов останется не больше двух, и если их двое, то придется повторять взвешивания на них до получения нового результата. Очевидно, что перед первым таким взвешиванием вероятность оказаться неисправными для каждого веса равна $1/2$, поэтому безразлично, на каких весах взвешивать. Но если в этом взвешивании повторился результат, показанный ранее, ситуация меняется. Действительно, для правильных весов вероятность повторения результата равна 1, а для неисправных $1/3$, поэтому после взвешивания условная вероятность того, что неисправны другие весы, равна $1 : (1 + 1/3) = 3/4$, так что новое взвешивание надо проводить именно на них. Если же и во втором взвешивании повторится прежний результат, то мы вернемся в исходную ситуацию. Таким образом, мы получаем последовательность взвешиваний с вероятностью получения нужного результата, равной $1/2 \cdot 2/3 = 1/3$ в нечетных взвешиваниях и $3/4 \cdot 2/3 = 1/2$ в чет-

ных. Тогда среднее число взвешиваний x удовлетворяет уравнению

$$x = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot (x + 2).$$

Действительно, с вероятностью $1/3$ мы получаем нужный результат в первом взвешивании, с вероятностью $2/3 \cdot 1/2$ во втором, а в остальных случаях среднее число взвешиваний после второго опять равно x . Решив это уравнение, получаем $x = 5/2$.

Примечание. Мы рассмотрели частный случай хорошо известной в теории вероятностей задачи о среднем числе испытаний до первого успеха; см., например, задачу 22.5.6 в книге «Элементы математики в задачах» (М.: МЦНМО, 2018). Там же можно прочитать и про вычисление условных вероятностей.

Итак, общее число испытаний в среднем равно $3 + 5/2 = 11/2$? Нет, этот вывод слишком поспешен. Во-первых, при первом взвешивании на испорченных весах мы можем получить равновесие, после чего дальнейшие взвешивания будут не нужны. Вероятность этого равна $1/3$, а поскольку взвешивание на неисправных весах может с равными вероятностями быть первым, вторым или третьим, то среднее число взвешиваний в этом случае равно 2. Во-вторых, число подозрительных весов может сократиться до двух уже после второго взвешивания. Скажем, если мы получили результаты $A > B$ при взвешивании на весах C и $C > A$ при взвешивании на B , то уже можно заключить, что весы A правильные и делать взвешивание на них не нужно. Вероятность такого события равна $1/3$. С учетом этого для среднего числа взвешиваний получаем

$$\frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{5}{2} \right) = \frac{37}{9}.$$

Согласитесь, что угадать такой ответ было бы довольно сложно.

Упражнение. Как изменится среднее число взвешиваний, если испорченные весы выдают верный результат с вероятностью p , а два других исхода равновероятны?

Вернемся к задаче М2628. Возможно, у читателя возник вопрос, почему в задаче спрашивается именно про три взвешивания. Дело в том, что это наименьшее

число, для которого вопрос содержателен, т.е. ни при каком n найти неисправные весы за два взвешивания нельзя! Действительно, пусть при первом взвешивании на чашах стоит по x весов и левая чаша перевесила. Тогда неисправными могут быть x левых весов (более тяжелые), x правых (более легкие) и весы, на которых делалось взвешивание (любые). Найти среди них неисправные одним взвешиванием можно только при $x = 1$, причем для этого надо иметь не меньше трех правильных весов (почему?). Однако, в этом случае $n \geq 6$ и при равновесии в первом взве-

шивании остается не менее четырех подозрительных весов, из которых невозможно найти неисправные одним взвешиванием.

В заключение предлагаем читателю подумать над следующими вопросами.

1. Верно ли что неисправные весы можно найти за три взвешивания при всех $4 \leq n \leq 13$?

2. При каких n можно найти среди n весов неисправные за k взвешиваний?

3. Как изменится ответ на предыдущий вопрос, если надо не только найти неисправные весы, но и выяснить, легче они настоящих или тяжелее?

Погода в пустыне Сахара

С.ВАРЛАМОВ

В «Кванте» № 11–12 за 2020 год приведено решение задачи Ф2624, основанное на предположении, что поглощение тепла воздухом и остывание воздуха происходят по очереди. Здесь же будет рассмотрена несколько иная картина теплообмена, возможно – более реалистичная.

Напомним условие задачи: *Суточный «ход» температуры воздуха летом на высоте 2 м (стандартная высота для метеорологических измерений) составляет в Сахаре 30°. Максимальная температура +40°C. Погода устойчивая, небо безоблачное. Оцените толщину слоя воздуха над поверхностью пустыни, вовлекаемого в конвекцию в течение суток. Солнечная постоянная равна 1370 Вт/м².*

Теперь – решение.

Тепловые явления, происходящие в атмосфере Земли, весьма сложны. Большое количество факторов определяют направления и мощности тепловых потоков. В атмосферных процессах задействованы все известные процессы теплопередачи: излучение, фазовые переходы (испарение-конденсация), теплопроводность и конвекция. Картина взаимного обмена теплотой

между атмосферой и поверхностью (твердой или жидкой) зависит от места на поверхности Земли, она меняется даже в течение суток и уж тем более за длительные промежутки времени (между зимой и летом). Если в воздухе имеются облака, то излучение, идущее и от Солнца и от поверхности Земли, рассеивается и перехватывается облаками.

Конкретно в Сахаре существуют и субтропические области, и области, в которых годами не выпадают осадки. Будем считать, что нас интересует ситуация в пустынных районах Сахары, где влажность воздуха весьма мала и никакой конденсированной воды на поверхности нет. Поэтому испарение воды, которое играет важную роль в других случаях, здесь не участвует по причине отсутствия вещества для испарения.

Итак, время – лето, когда Солнце бывает в зените, ветра нет. Днем при солнечном освещении теплота передается от поверхности атмосферному воздуху, который, прогреваясь снизу, участвует в конвекции. Ночью подогрев снизу прекращается, и конвекция замедляется. Согласно условию задачи нужно оценить толщину приземного слоя воздуха, который за дневное время суток прогревается на величину порядка 30 градусов.

На рисунке 1 показаны основные направления, в которых «путешествует» энергия, попавшая с излучением Солнца на Землю. В подписи к рисунку указано, что величи-