Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

З. Дегтярева, Д. Максимов, Снова теорема Штейнера–
Лемуса, *Квант*, 2021, номер 2, 37–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20210206>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 04:51:28

Снова теорема Штейнера–Лемуса

З.ДЕГТЯРЕВА, Д.МАКСИМОВ

ОДНОЙ ИЗ САМЫХ УДИВИТЕЛЬНЫХ, загадочных и красивых теорем в геометрии по праву считается теорема Штейнера–Лемуса, которая формулируется так:

Если в треугольнике две биссектрисы равны, то этот треугольник равнобедренный.

Теореме Штейнера–Лемуса более полутора веков. За это время накопилось много разных ее доказательств, появляются все новые и новые. Прочитав статьи А. Коробова «Семь решений задачи Штейнера» («Квант» №4 за 1996 г.) и Л.Штейнгаца «Новый взгляд на теорему Штейнера–Лемуса» («Квант» №1 за 2013 г.), мы решили внести свой вклад в доказательство этой теоремы. Предлагаем читателям еще четыре доказательства, найденных нами.

Первое доказательство

Пусть AA_1 , BB_1 – биссектрисы треугольника ABC , $\alpha = \frac{1}{2}\angle A$, $\beta = \frac{1}{2}\angle B$, $AA_1 = BB_1$.

Докажем, что $AC = BC$.

Доказательство. Рассуждаем от противного. Пусть, не умаляя общности рассуждений, $\angle A < \angle B$, т.е. $\alpha < \beta$ (рис.1). Рассмотрим два случая.

Рис. 1

Первый случай: $\angle A \leq \angle C$, т.е. $2\alpha \leq \angle C$. Из точки B проведем отрезок BD так, что $\angle ABD = \alpha$ и $\angle BAD = 2\beta$. Тогда треугольники ADB и AA_1B равны по стороне и двум прилежащим углам, значит, $DB = AA_1 = BB_1$. Пусть BD пересекает AC в точке M . Получаем, что $MB < BD = BB_1$. По теореме о внешнем угле треугольника имеем $\angle 1 = \angle A + \alpha$, $\angle 2 = \angle C + \beta$, следовательно, $\angle 1 < \angle 2$. Таким образом, в треугольнике MB_1B имеем $MB > BB_1$ – противоречие.

Рис. 2

Второй случай: $\angle A > \angle C$ (рис.2). Докажем, что $BC > B_1C > CA_1$. Действительно, по теореме о биссектрисе

$$\begin{aligned} \frac{BC}{CA_1} &= \frac{BA_1 + CA_1}{CA_1} = \\ &= \frac{BA_1}{CA_1} + 1 = \frac{AB}{AC} + 1 = \frac{AB + AC}{AC}, \end{aligned}$$

откуда

$$CA_1 = BC \frac{AC}{AB + AC}.$$

Аналогично получим, что

$$B_1C = BC \frac{AC}{AB + BC}.$$

Из неравенства треугольника следует, что $\frac{AC}{AB + BC} < 1$. Следовательно, $BC > B_1C$. Так как $\angle A < \angle B$, то $BC < AC$, значит, $BC + AB < AC + AB$, т.е. $B_1C > CA_1$.

Наложим треугольник $B_2B_1'C$, равный треугольнику BB_1C , на AA_1C так, чтобы углы при вершине C совпали. Сторона B_2C пойдет по стороне AC , CB_1' – по стороне CA_1 . Поскольку $AC > BC = B_2C > B_1C$, точка B_2 лежит на отрезке AB_1 .

Итак, $CB'_1 = CB_1$. Далее, так как $BC > B_1C = B'_1C > CA_1$, то точка B'_1 лежит на отрезке A_1B . Следовательно, прямые $B_2B'_1$ и AA_1 пересекутся внутри треугольника ABC в некоторой точке O .

В треугольнике ABB_1 выполнено соотношение $\angle 1 = 180^\circ - \angle A - \beta$. В треугольнике CB_1B имеем $\angle 2 = 180^\circ - \angle C - \beta$. По предположению, $\angle A > \angle C$, следовательно, $\angle 1 < \angle 2$, а так как они смежные, то $\angle 2$ тупой. Но $\angle 2 = \angle 3$ по построению, т.е. $\angle 3$ тоже тупой, и $\angle AB_2O = \angle 3 + \angle C > 90^\circ$. Тогда $AO > B_2O$ и $OA_1 > OB'_1$. Складывая эти неравенства, получаем $AA_1 > B_2B'_1 = BB_1$, что противоречит условию.

Теорема доказана.

Второе доказательство

В треугольнике ABC проведены биссектрисы AH и BH_1 , причем $AH = BH_1 = l$, $\alpha = \frac{1}{2}\angle A$, $\beta = \frac{1}{2}\angle B$ (рис.3). Докажем, что $BC = AC$.

Доказательство. Опишем около треугольника ABC окружность (рис.4). Продолжим биссектрису AH до пересечения с окружностью в точке D , а биссектрису BH_1 – до пересечения с окружностью в точке D_1 .

Треугольники CAH и DAB подобны по двум углам: $\angle 1 = \frac{1}{2}\angle A = \angle 2$, $\angle CAH = \angle DAB$, следовательно, $\frac{AB}{AD} = \frac{AH}{AC}$, т.е.

$$AB \cdot AC = AD \cdot l. \quad (1)$$

Аналогично доказывается равенство

$$AB \cdot BC = BD_1 \cdot l. \quad (2)$$

Рис. 3

Рис. 4

Рис. 5

Построим еще одну окружность ω с диаметром AD (рис.5). Опустим перпендикуляры DE и DF на прямые AC и AB соответственно. Тогда так как AD – диаметр ω , то точки E и F лежат на данной окружности и четырехугольник $AEDF$ вписанный.

Далее, $\angle ADE = \angle ADF = 90^\circ - \alpha$. Значит, $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{AF}$ и $AE = AF$, AH – биссектриса, медиана и высота равнобедренного треугольника AEF . Поэтому $HE = HF = \frac{1}{2}EF$ и $\angle AHE = 90^\circ$.

Умножим обе части равенства (1) на $\frac{1}{2} \sin \angle A$:

$$\frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \angle A = \frac{1}{2} AD \cdot l \sin \angle A.$$

С другой стороны,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AD \cdot l \sin \angle A. \quad (3)$$

Треугольник AEF вписан в окружность с диаметром AD . По теореме синусов $\frac{EF}{\sin \angle A} = AD$, т.е. $EF = AD \sin \angle A$; подставляя в (3), получим

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} l \cdot EF. \quad (4)$$

Проведем аналогичные построения с отрезком BD_1 : построим окружность ω_1 с диаметром BD_1 (рис.6) и опустим перпендикуляры D_1E_1 и D_1F_1 на прямые BC и AB соответственно. Тогда, аналогично (4), получаем

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} l \cdot E_1F_1.$$

Рис. 6

Сравнивая с (4), получим $EF = E_1F_1$.

Из рисунков 5 и 6 имеем: треугольники AEN и BE_1H_1 равны по двум катетам, поскольку $H_1E_1 = \frac{1}{2}E_1F_1 = \frac{1}{2}EF = HE$ и $H_1B = l = AN$. Следовательно, $\angle EAN = \angle E_1BH_1$, т.е. $\alpha = \beta$, откуда $BC = AC$.

Третье доказательство

В треугольнике ABC проведены биссектрисы AE , CD , причем $AE = CD = l$. Докажем, что $BC = AB$.

Доказательство. Проведем через точку E прямую, параллельную CD , и обозначим ее точку пересечения с AB через M (рис.7). Проведем через точку D прямую, параллельную AE , и обозначим ее точку пересечения с BC через K . Тогда по обобщенной теореме Фалеса имеем

$$\frac{l}{DK} : \frac{l}{ME} = \frac{AB}{BD} : \frac{BC}{BE},$$

следовательно,

$$\frac{ME}{DK} = \frac{AB \cdot BE}{BD \cdot BC}. \quad (5)$$

Рис. 7

С другой стороны,

$$\frac{l}{DK} : \frac{l}{ME} = \frac{BE}{BK} : \frac{BD}{MB},$$

поэтому

$$\frac{ME}{DK} = \frac{BE \cdot MB}{BK \cdot BD}. \quad (6)$$

Из (5) и (6) имеем

$$\frac{AB \cdot BE}{BD \cdot BC} = \frac{BE \cdot MB}{BK \cdot BD}, \text{ или } \frac{AB}{BC} = \frac{MB}{BK}.$$

Следовательно, $AC \parallel MK$.

Угол BMK внешний для треугольника DMK , $2\alpha = \alpha + \angle DKM$, т.е. $\angle DKM = \alpha$ и треугольник DMK равнобедренный. Аналогично, $\angle KME = \beta$ и треугольник MKE равнобедренный. Таким образом, $DM = MK = KE$.

Продолжим AC , MK , DK , DC (рис.8). Обозначим через A_1 точку пересечения прямых DK и AC , через K_1 — прямых DC и MK , через B_1 — прямых BC и A_1K_1 . Получим треугольник $A_1B_1C_1$, подобный треугольнику ABC .

Если $AE = CD$, то $A_1K = CK_1$. Треугольники A_1K_1K и K_1KC равнобедренные, $A_1K = K_1K = KC$, $KK_1 \parallel A_1C$, поэтому A_1K_1KC — равнобокая трапеция. Следовательно,

Рис. 8

$\angle A_1 = \angle C$, откуда $\angle A = \angle C$ и треугольник ABC равнобедренный, что и требовалось доказать.

Четвертое доказательство

Лемма. Если в треугольнике ABC $AM = l_a$ — биссектриса, $BM = x$, $MC = y$, то $l_a^2 = bc - xy$ (рис.9).

Рис. 9

Доказательство. Продолжим биссектрису AM до ее пересечения с описанной окружностью треугольника ABC в точке D . Треугольники ACD и AMB подобны по двум углам, поскольку $\angle BAM = \angle DAC$ и $\angle 1 = \angle 2$. Следовательно,

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{l_a}, l_a \cdot AD = bc.$$

Поскольку $AD = l_a + MD$, имеем $l_a(l_a + MD) = bc$, т.е. $l_a^2 + l_a \cdot MD = bc$. Но по теореме о произведении отрезков хорд $l_a \cdot MD = xy$, откуда $l_a^2 + xy = bc$, $l_a^2 = bc - xy$. Лемма доказана.

Теорема. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AE и CD , $AE = CD$, $\alpha = \frac{1}{2}\angle A$, $\beta = \frac{1}{2}\angle C$. Тогда $BC = AB$.

Доказательство. Предположим, что $AB > BC$, т.е. $\beta > \alpha$ (рис.10). Тогда в треугольнике AOC , где O — точка пересечения биссектрис, имеем $AO > OC$. Поскольку $CD = OC + OD$, $AE = AO + OE$ и $AE = CD$, то $OD > OE$.

В треугольниках ADC и AEC сторона AC общая, $AE = DC$, $\angle DCA > \angle EAC$, следовательно,

$$AD > EC. \quad (7)$$

Рис. 10

По лемме имеем $AE^2 = AB \cdot AC - CE \cdot BE$ и $CD^2 = BC \cdot AC - AD \cdot BD$, откуда получаем следующее равенство:

$$AB \cdot AC - BE \cdot CE = BC \cdot AC - AD \cdot BD. \quad (8)$$

Так как $AB > BC$, то $AB \cdot AC > BC \cdot AC$, но из (7) $EC < AD$. Чтобы равенство (8) выполнялось, надо положить

$$BE > BD. \quad (9)$$

Далее, BF — биссектриса угла B , $\angle DBO = \angle OBE = 90^\circ - \alpha - \beta$; $\angle BDO$ — внешний угол в треугольнике ADC , поэтому $\angle BDO = 2\alpha + \beta$. Аналогично, $\angle BEO = 2\beta + \alpha$. Тогда

$$\begin{aligned} S_{\Delta BDO} &= \frac{1}{2} BD \cdot BO \sin(90^\circ - (\alpha + \beta)) = \\ &= \frac{1}{2} BD \cdot BO \cos(\alpha + \beta), \end{aligned}$$

таким же образом

$$S_{\Delta BEO} = \frac{1}{2} BE \cdot BO \cos(\alpha + \beta).$$

Поскольку $BE > BD$, то

$$S_{\Delta BDO} < S_{\Delta BEO}. \quad (10)$$

С другой стороны, имеем $\angle DOB = 180^\circ - (2\alpha + \beta) - (90^\circ - \alpha - \beta) = 90^\circ - \alpha$, аналогично, $\angle EOB = 90^\circ - \beta$, откуда получаем

$$S_{\Delta BDO} = \frac{1}{2} OD \cdot OB \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} OD \cdot OB \cos \alpha$$

и, из таких же соображений,

$$S_{\Delta BEO} = \frac{1}{2} OE \cdot OB \sin(90^\circ - \beta) = \frac{1}{2} OE \cdot OB \cos \beta.$$

Но $\cos \alpha > \cos \beta$ (так как $\beta > \alpha$) и $OD > OE$. Поэтому

$$S_{\Delta BDO} > S_{\Delta BEO},$$

что противоречит соотношению (10).