Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Канунников, И. Воробьев, Линейная независимость радикалов, *Квант*, 2021, номер 3, 12–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20210302>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 14:42:45

Линейная независимость радикалов

А.КАНУННИКОВ, И.ВОРОБЬЕВ

§1. Введение

Как доказать иррациональность чисел

$$\sqrt[3]{\frac{121}{111}}, \sqrt{2} + \sqrt{3}, \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}, \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7},$$

$$\sqrt[5]{3} - \sqrt[5]{2}, \sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{\sqrt[17]{2021!}}{2021} + \sqrt[5]{\frac{7^{7^7}}{3^{3^3}}}$$

Иррациональность одного радикала – простой, чисто арифметический вопрос, сводящийся к разложению на простые множители.

Лемма 1.¹ Пусть $A, B, k \in \mathbb{N}$ и $\text{НОД}(A, B) = 1$. Тогда $\sqrt[k]{A/B} \in \mathbb{Q}$, если и только если показатели степеней всех простых делителей в разложениях чисел A и B кратны k .

Число $\sqrt[3]{\frac{121}{111}} = \sqrt[3]{\frac{11^2}{3 \cdot 37}}$ иррационально по лемме 1. Если $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, то $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$, откуда $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$, что неверно по той же лемме. Предположив, что $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} = a \in \mathbb{Q}$, возведем равенство $\sqrt[3]{3} = a - \sqrt{2}$ в куб: $3 = a^3 + 6a - (3a^2 + 2)\sqrt{2}$ и придем к противоречию: $\sqrt{2} = \frac{a^3 + 6a - 3}{3a^2 + 2} \in \mathbb{Q}$. Однако остальные числа «голыми руками не возьмешь»: незатейливое возведение в степень только приумножит количество радикалов.

«Неужели, прочитав статью, я пойму, почему даже последнее, нарочито дикое,

число иррационально?» – наверное, думает читатель в эту минуту. «Да, – ответим мы, – если только вы умеете делить многочлены с остатком и извлекать корни из комплексных чисел. Если пока не умеете, то во всяком случае вы разберетесь со сколь угодно длинными суммами квадратных радикалов».

На самом деле мы докажем даже большее: между корнями из рациональных чисел не существует линейных соотношений с рациональными коэффициентами, кроме очевидных отношений пропорциональности, например $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Вот точная формулировка.

Теорема 1. Пусть $N, k_1, \dots, k_N \in \mathbb{N}$, $N > 1$, $0 < Q_1, \dots, Q_N \in \mathbb{Q}$ и $\sqrt[k_i]{Q_i} / \sqrt[k_j]{Q_j} \notin \mathbb{Q}$ при $i \neq j$. Тогда равенство

$$a_1 \sqrt[k_1]{Q_1} + \dots + a_N \sqrt[k_N]{Q_N} = 0,$$

где $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{Q}$,

выполняется только при $a_1 = \dots = a_N = 0$.

В частности, при $Q_1 = 1$ получим, что сумма $\sqrt[k_2]{Q_2} + \dots + \sqrt[k_N]{Q_N}$ иррациональна, так как равенство $a_1 \sqrt[k_1]{1} + \sqrt[k_2]{Q_2} + \dots + \sqrt[k_N]{Q_N} = 0$ не может выполняться ни при каком $a_1 \in \mathbb{Q}$.

Чтобы применять теорему 1, нужно проверять иррациональность отдельных радикалов $\sqrt[k_i k_j]{Q_i^{k_j} / Q_j^{k_i}}$ по лемме 1.

Задача 1. Выведите из теоремы 1 и леммы 1 иррациональность трех последних чисел в начале статьи.

На языке векторов утверждение теоремы 1 формулируется так: числа $\sqrt[k_1]{Q_1}, \dots, \sqrt[k_N]{Q_N}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$ (сравните с

¹ Леммы и теоремы мы предлагаем читателю доказывать самостоятельно, так же как и решать задачи. Доказательства и решения будут приведены в следующем номере журнала.

некомпланарными векторами на рисунке 1). Условие $k_i \sqrt[Q_i]{Q_i} / k_j \sqrt[Q_j]{Q_j} \notin \mathbb{Q}$ в

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

Рис. 1

этих терминах означает линейную независимость чисел $k_i \sqrt[Q_i]{Q_i}$ и $k_j \sqrt[Q_j]{Q_j}$ над $\mathbb{Q}$ (линейная независимость двух векторов – это просто их неколлинеарность).

Вообще, взгляд на алгебраические числа (в частности, на радикалы) как на векторы оказывается естественным и продуктивным – он позволяет применять геометрические идеи к алгебраическим задачам (см. [4]).

Сформулируем более удобную для доказательства, но, как окажется, равносильную теорему.

Теорема 2. Пусть $k, n \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots, p_n$ – различные простые числа, $r_1 = \sqrt[k]{p_1}, \dots, r_n = \sqrt[k]{p_n}$. Тогда система $\{r_1^{l_1} \dots r_n^{l_n} \mid 0 \leq l_1, \dots, l_n < k\}$ из k^n чисел линейно независима над $\mathbb{Q}$.

Эту систему удобно представлять в виде n -мерной решетки (рис. 2).

понять идеи доказательства. Полное рассуждение с любым k индукцией по n проведем в §3.

Пример 2. Докажем, что числа $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ (см. рис.2,а) линейно независимы. Пусть $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = 0$, где $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Выделим $\sqrt{3}$: $a + b\sqrt{2} + (c + d\sqrt{2})\sqrt{3} = 0$. Если $c + d\sqrt{2} = 0$, то и $a + b\sqrt{2} = 0$, а тогда, ввиду иррациональности $\sqrt{2}$, $c = d = 0$ и $a = b = 0$. Если же $c + d\sqrt{2} \neq 0$, то

$$\sqrt{3} = -\frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = -\frac{(a + b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})}{c^2 - 2d^2} = A + B\sqrt{2},$$

$$\text{где } A = \frac{bd - ac}{c^2 - 2d^2}, B = \frac{ad - bc}{c^2 - 2d^2} \in \mathbb{Q}.$$

Возведем равенство $\sqrt{3} = A + B\sqrt{2}$ в квадрат:

$$3 = A^2 + 2B^2 + 2AB\sqrt{2} \Rightarrow AB = 0, \text{ иначе } \sqrt{2} \in \mathbb{Q}.$$

При $A = 0$ получаем $\sqrt{3/2} = B \in \mathbb{Q}$, при $B = 0$ получаем $\sqrt{3} = A \in \mathbb{Q}$ – противоречие с леммой 1.

Мы свели линейную независимость чисел на рисунке 2,а к «инородности» $\sqrt{3}$ по отношению к множеству

$$\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2} = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$$

(формально, $\sqrt{3}$ не лежит в нем), подобно тому как $\sqrt{2}$ инородно по отношению к $\mathbb{Q}$. При этом оказалось важно, что в множестве $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$ можно не только складывать, вычитать, умножать, но и делить (не на 0), как и в $\mathbb{Q}$. Прежде чем сделать следующий шаг, введем несколько понятий.

Немного теории. Множество чисел, содержащее 0 и 1 и замкнутое относительно четырех арифметических действий, называется *числовым полем*. Слово «числовое» мы будем опускать. Итак, K – поле, если $0, 1 \in K$ и для любых $a, b \in K$ верно

$a \pm b, ab \in K$ и $a/b \in K$ при $b \neq 0$. Легко понять, что $\mathbb{Q}$ – поле, причем «самое маленькое» – любое поле его содержит.² Если поле K содержится в поле L , то говорят, что K – *подполе* в L . В этом параграфе все поля лежат в поле $\mathbb{R}$ действительных чисел.

Числа $x_1, \dots, x_n$ называются *линейно независимыми над полем K* , если равенство $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$, где $a_1, \dots, a_n \in K$, выполняется только при $a_1 = \dots = a_n = 0$. Например, числа 1 и $\sqrt{2}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$, но линейно зависимы над $\mathbb{R}$ (равенство $a_1 \cdot 1 + a_2\sqrt{2} = 0$ верно при $a_1 = \sqrt{2}$ и $a_2 = -1$).

Лемма 2 (свойства линейной зависимости над произвольным полем K).

1) Система, содержащая 0 или два числа, отношение которых лежит в K , линейно зависима над K .

2) Подсистема линейно независимой системы линейно независима.

3) Система 1, x линейно независима над K , если и только если $x \notin K$.

4) Коэффициенты $a_1, \dots, a_n \in K$ в записи числа $a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ определены однозначно, если и только если система $x_1, \dots, x_n$ линейно независима над K .

Наименьшее (по включению) поле, содержащее поле K и числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, обозначается $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и называется полем, порожденным над K этими числами. Опишем поле, порожденное над K одним квадратным радикалом $\sqrt{d} \notin K$, где $d \in K$. Поле $K(\sqrt{d})$, очевидно, состоит из отношений чисел вида $a + b\sqrt{d}$, где $a, b \in K$. Но от иррациональности в знаменателе можно избавиться, домножив на сопряженное $a - b\sqrt{d}$:

$$\frac{1}{a + b\sqrt{d}} = \frac{a - b\sqrt{d}}{a^2 - db^2}$$

(как в примере 2). Значит,

$$K(\sqrt{d}) = \{a + b\sqrt{d} | a, b \in K\}.$$

² Бывают и другие поля: поле вычетов $\mathbb{Z}_p$, поле рациональных функций и др. Любое поле содержит либо $\mathbb{Q}$, либо $\mathbb{Z}_p$.

Пример 3. Пусть p, q – различные простые числа. Аналогично примеру 2, $\sqrt{q} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ и числа $1, \sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{pq}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Поэтому

$$\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}) = \mathbb{Q}(\sqrt{p})(\sqrt{q}) = \\ = \{a + b\sqrt{p} + c\sqrt{q} + d\sqrt{pq} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\},$$

причем запись чисел в таком виде однозначна.

Пример 4. Докажем, что числа на рисунке 2,б линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Пусть $a_1 + a_2\sqrt{2} + \dots + a_8\sqrt{30} = 0$, где $a_1, a_2, \dots, a_8 \in \mathbb{Q}$.

Шаг 1. Вынося $\sqrt{5}$ за скобки, получим равенство вида $A + B\sqrt{5} = 0$, где $A, B \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$:

$$\underbrace{a_1 + a_2\sqrt{2} + a_3\sqrt{3} + a_5\sqrt{6}}_A + \\ + \underbrace{(a_4 + a_6\sqrt{2} + a_7\sqrt{3} + a_8\sqrt{6})}_B \sqrt{5} = 0. \quad (1)$$

Достаточно доказать, что $A = B = 0$. Тогда, согласно примеру 2, $a_1 = a_2 = a_3 = a_5 = 0$ и $a_4 = a_6 = a_7 = a_8 = 0$.

Шаг 2. Надо доказать, что числа 1 и $\sqrt{5}$ линейно независимы над полем $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Это равносильно условию $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ (пункт 3 леммы 2).

Шаг 3. Предположим, что $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, т.е., с учетом описания этого поля в примере 3,

$$\sqrt{5} = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}, \\ \text{где } a, b, c, d \in \mathbb{Q}. \quad (2)$$

Большое число радикалов может отбить желание возводить в квадрат. Однако это можно сделать по-умному, предварительно сгруппировав слагаемые одним из двух способов:

$$\underbrace{a + b\sqrt{2}}_C + \underbrace{(c + d\sqrt{2})\sqrt{3}}_D = \sqrt{5} = \\ = \underbrace{a + b\sqrt{3}}_{C'} + \underbrace{(b + d\sqrt{3})\sqrt{2}}_{D'}, \quad (3)$$

и «не тревожить» C, D, C', D' . Возведем в

квадрат первое равенство:

$$C^2 + 3D^2 + 2CD\sqrt{3} = 5.$$

Так как числа 1 и $\sqrt{3}$ линейно независимы над полем $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, то $CD = 0$. Аналогично, $C'D' = 0$. Всего 4 варианта: $C = C' = 0$, $C = D' = 0$, $C' = D = 0$ или $D = D' = 0$. Если $C = C' = 0$, то $a = b = c = 0$, поэтому $\sqrt{5} = d\sqrt{6}$, а это противоречит лемме 1. В других случаях получается аналогичное противоречие, так как в правой части равенства (2) остается лишь одно ненулевое слагаемое.

Задача 4. Докажите теорему 2 при $k = 2$: сделайте шаг индукции от $n - 1$ к n , следуя примеру 4.

Прежде чем переходить к радикалам более высокой степени, обсудим, как можно было сделать последний шаг с прицелом на общий случай – без возведения в квадрат. Согласитесь, даже столь безобидное равенство, как $\sqrt[3]{3} = a + b\sqrt[3]{2}$ ($a, b \in \mathbb{Q}$), едва ли удастся привести к противоречию лобовым возведением в пятую степень... Что если в равенствах (3) перейти к сопряженным числам?

Назовем числа вида $a \pm b\sqrt{d}$ над полем K , где $a, b, d \in K$, $\sqrt{d} \notin K$, сопряженными. В равенствах (3) сопряженным к числу $C + D\sqrt{3}$ над полем $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ будет $C - D\sqrt{3}$, а сопряженным к числу $C' + D'\sqrt{2}$ над полем $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ будет $C' - D'\sqrt{2}$. В то же время сопряженным к числу $\sqrt{5}$ над обоими полями будет $-\sqrt{5}$. Раз числа равны, то равны и их сопряженные:

$$C - D\sqrt{3} = -\sqrt{5} = C' - D'\sqrt{2}. \quad (4)$$

Отсюда и из (3) получаем $C = C' = 0$, что невозможно, как показано выше.

Увы, несмотря на кажущуюся строгость, это рассуждение содержит «дыру», однако его можно спасти. Логическая ошибка довольно тонкая, и читатель, который ее обнаружит и исправит, вправе собой гордиться.

Задача 5. Почему переход от (3) к (4) не обоснован и как его доказать?

Переход к сопряженным часто бывает эффективен. Вот несколько олимпиадных задач на эту тему.

Задача 6. Существуют ли такие рациональные числа a, b, c, d , что $(a + b\sqrt{2})^2 + (c + d\sqrt{2})^2 = 7 + 5\sqrt{2}$?

Задача 7. Найдите первые 1000 знаков после запятой в десятичной записи числа $(6 + \sqrt{35})^{1000}$.

Задача 8. Докажите, что произведение 2^{100} чисел $\pm\sqrt{1} \pm \sqrt{2} \pm \dots \pm \sqrt{99} \pm \sqrt{100}$ — полный квадрат.

§3. Общий случай

Начнем доказывать теорему 2 при произвольном k , следуя плану из примера 4. При этом на каждом шаге будут возникать новые трудности. Чем дальше в лес — тем больше дров.

Шаг 1: отщепление последнего радикала. Линейное соотношение над $\mathbb{Q}$ (т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Q}$) девяти чисел на рисунке 2, в можно записать в виде

$$f_0(\sqrt[3]{2}) + f_1(\sqrt[3]{2})\sqrt[3]{3} + f_2(\sqrt[3]{2})\sqrt[3]{9} = 0,$$

где f_0, f_1, f_2 — многочлены степени меньше 3 над $\mathbb{Q}$ (сгруппировали слагаемые, как в (1)). Поэтому линейная независимость этих чисел будет следовать из двух фактов:

числа $1, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9}$ линейно независимы над полем $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$; (5)

числа $1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$ линейно независимы над полем $\mathbb{Q}$. (6)

В самом деле, из (5) получаем $f_0(\sqrt[3]{2}) = f_1(\sqrt[3]{2}) = f_2(\sqrt[3]{2}) = 0$, а тогда из (6) коэффициенты многочленов f_0, f_1, f_2 — нулевые. Это рассуждение несложно обобщить и свести теорему 2 к следующей.

Теорема 2'. В обозначениях теоремы 2 числа $1, r_n, \dots, r_n^{k-1}$ линейно независимы над полем $\mathbb{Q}(r_1, \dots, r_{n-1})$.

Шаг 2: «инородность» последнего радикала. Пусть K — любое поле, r — такое число, что $r^k \in K$. Выясним, когда

числа $1, r, \dots, r^{k-1}$ линейно независимы над K . (7)

Иными словами, r не должно быть корнем многочлена степени меньше k с коэффициентами из K . При $k = 2$ это просто означает, что $r \notin K$. При $k > 2$ все гораздо сложнее и интереснее.

Немного теории. Множество многочленов над полем K обозначается $K[x]$. Многочлен над K положительной степени, который не раскладывается в произведение многочленов над K меньших степеней, называется *неприводимым* над K . Многочлены над полем можно делить с остатком («уголком»).

Пусть число α является корнем ненулевого многочлена над полем K , тогда оно называется *алгебраическим над K* . Среди всех таких многочленов только один имеет наименьшую степень и старший коэффициент 1 (если бы их было два, то их разность была бы многочленом меньшей степени с корнем α). Он называется *минимальным многочленом* числа α над K , и мы будем его обозначать $\mu_\alpha^K(x)$ или $\mu_\alpha(x)$, если ясно, о каком поле K идет речь.

Теорема 3. Многочлен $\mu_\alpha^K(x) = \mu_\alpha(x)$ обладает следующими свойствами:

1) его степень есть наименьшее такое $t \in \mathbb{N}$, что числа $1, \alpha, \dots, \alpha^t$ линейно независимы над K ;

2) многочлен $\mu_\alpha(x)$ неприводим над K ;

3) любой многочлен из $K[x]$ с корнем α делится на $\mu_\alpha(x)$;

4) неприводимый над K многочлен $p(x)$ с корнем α и старшим коэффициентом 1 равен $\mu_\alpha(x)$.

Таким образом, $(7) \Leftrightarrow \mu_r^K(x) = x^k - r^k \Leftrightarrow \Leftrightarrow$ двучлен $x^k - r^k$ неприводим над K . Например, утверждения (5) и (6) равносильны соответственно неприводимости двучлена $x^3 - 3$ над $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ и двучлена $x^3 - 2$ над $\mathbb{Q}$, а это значит, что $\sqrt[3]{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ и $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$ (кубический многочлен неприводим над полем, если не имеет в нем корней). В общем случае условие «инородности» $r \notin K$ необходимо, но не достаточно. Хотя в нашем случае действующие лица K

и r лежат в поле $\mathbb{R}$, мы выйдем в комплексную плоскость — поле $\mathbb{C}$, где двучлен $x^k - r^k$ раскладывается на линейные множители. По формуле Муавра [3]

$$x^k - r^k = (x - r)(x - r\varepsilon) \dots (x - r\varepsilon^{k-1}),$$

где $\varepsilon = \varepsilon_k = \cos \frac{2\pi}{k} + i \sin \frac{2\pi}{k}$ (8)

(рис. 3).

Лемма 3. Пусть K — подполе в $\mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$,

Рис. 3

$r^k \in K$ и $r, \dots, r^{k-1} \notin K$. Тогда двучлен $x^k - r^k$ неприводим над K .

(Для $r \notin \mathbb{R}$ лемма неверна; например, при $k = 3$ и $r = \varepsilon$ имеем $\varepsilon, \varepsilon^2 \notin \mathbb{R}$, но двучлен $x^3 - 1$ приводим.)

Пример 5. Для любого простого p и натурального $k > 1$ имеем $\sqrt[k]{p}, \dots, \sqrt[k]{p^{k-1}} \notin \mathbb{Q}$ (лемма 1), поэтому двучлен $x^k - p$ неприводим над $\mathbb{Q}$ (лемма 3)³, значит, $\mu_{\sqrt[k]{p}}^{\mathbb{Q}}(x) = x^k - p$.

Вообще, теорема 2' посредством леммы 3 сведена к **теореме 2''**: в тех же обозначениях

$$r_n, \dots, r_n^{k-1} \notin \mathbb{Q}(r_1, \dots, r_{n-1}). \quad (9)$$

При $n = 1$ это верно по лемме 1. Чтобы прийти к противоречию при $n > 1$, научимся записывать числа из $\mathbb{Q}(r_1, \dots, r_{n-1})$ в виде многочленов от $r_1, \dots, r_{n-1}$. Например, условие $\sqrt[3]{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ запишется в виде $\sqrt[3]{3} \neq a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ при $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

Шаг 3: избавление от иррациональности в знаменателе. Пресловутое «домножение на сопряженное» работает лишь с квадратными радикалами. Как действовать при $k > 2$, сначала покажем на примере.

Пример 6. Избавимся от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 3}$. Обозначим $r = \sqrt[3]{2}$ и $f(x) = x^2 + x + 3$. Надо найти такой многочлен $u \in \mathbb{Q}[x]$, что $\frac{1}{f(r)} = u(r)$. Это значит, что многочлен $f(x)u(x) - 1$ имеет корень r , а тогда делится на $\mu_r^{\mathbb{Q}}(x) = x^3 - 2$ (пример 5). Таким образом,

$$u(x)f(x) + v(x)(x^3 - 2) = 1$$

для некоторого многочлена $v \in \mathbb{Q}[x]$. Многочлены u и v найдем с помощью алгоритма Евклида.

Алгоритм Евклида:

$$x^3 - 2 = (x^2 + x + 3)(x - 1) - 2x + 1;$$

$$x^2 + x + 3 = (2x - 1)\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) + \frac{15}{4}.$$

Обратный ход алгоритма Евклида:

$$\begin{aligned} \frac{15}{4} &= f(x) - (f(x)(x - 1) - (x^3 - 2))\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) = \\ &= (x^3 - 2)\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) + f(x)\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}\right). \end{aligned}$$

Итак,

$$(2x^2 + x - 7)(x^2 + x + 3) - (2x + 3)(x^3 - 2) = -15,$$

откуда при $x = r$ получаем

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 3} = \frac{7 - \sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4}}{15}.$$

Лемма 4 (об избавлении от иррациональности в знаменателе). Если число α алгебраично над полем K и $\deg \mu_{\alpha}(x) = k$, то каждое число в поле $K(\alpha)$ однозначно записывается в виде

$$c_0 + c_1\alpha + \dots + c_{k-1}\alpha^{k-1},$$

$$\text{где } c_0, c_1, \dots, c_{k-1} \in K. \quad (10)$$

³ В [5] линейная независимость чисел $1, \sqrt[k]{p}, \dots, \sqrt[k]{p^{k-1}}$ также сведена к неприводимости двучлена $x^k - p$, установленной по признаку Эйзенштейна.

Задача 9. Избавьтесь от иррациональности в знаменателях: а) $\frac{1}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6}}$; б) $\frac{1}{\sqrt[4]{27} + 2\sqrt[4]{3} - 1}$.

Вернемся к доказательству теоремы 2". По предположению индукции двучлен $x^k - r_1^k$ неприводим над $\mathbb{Q}$, двучлен $x^k - r_2^k$ — над $\mathbb{Q}(r_1), \dots$, двучлен $x^k - r_{n-1}^k$ — над $\mathbb{Q}(r_1, \dots, r_{n-2})$. Последовательно избавляясь от иррациональности в знаменателе, представим каждое число из $\mathbb{Q}(r_1, \dots, r_{n-1})$ однозначно в виде суммы чисел вида

$$ar_1^{l_1} \dots r_{n-1}^{l_{n-1}}, \text{ где } a \in \mathbb{Q}, 0 \leq l_1, \dots, l_{n-1} < k. \quad (11)$$

Пусть (9) неверно, т.е. r_n^l при некотором $l \in \{1, \dots, k-1\}$ равно сумме чисел вида (11). В этой сумме должно быть больше одного слагаемого, иначе $r_n^l / (r_1^{l_1} \dots r_{n-1}^{l_{n-1}}) = a \in \mathbb{Q}$, что противоречит лемме 1. Значит, какой-то из радикалов $r_1, \dots, r_{n-1}$ встречается в двух слагаемых в разных степенях, пусть это r_{n-1} . Итак,

$$r_n^l = A_0 + A_1 r_{n-1} + \dots + A_{k-1} r_{n-1}^{k-1}, \quad (12)$$

где среди $A_0, \dots, A_{k-1} \in \mathbb{Q}(r_1, \dots, r_{n-2})$ хотя бы два ненулевых. Самое интересное наступает в этот момент — трудность по сравнению со случаем $k = 2$ возрастает еще больше. И вправду, при $k = 2$ равенство (12) совсем не страшно: $\sqrt{p_n} = A_0 + A_1 \sqrt{p_{n-1}}$ без труда возводится в квадрат. Но при $k > 2$ о возведении (12) в k -ю степень даже думать не хочется... На помощь вновь приходят минимальные многочлены. Но если для левой части минимальный многочлен найти легко, то для правой не очевидна даже алгебраичность.

Пример 7. Приведем к противоречию упомянутое выше равенство $\sqrt[3]{3} = a + b\sqrt[3]{2}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$, — частный случай (12). По лемме 1, $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Согласно примеру 5, $\mu_{\sqrt[3]{3}}(x) = x^3 - 3$ и $\mu_{\sqrt[3]{2}}(x) = x^3 - 2$, а тогда $\mu_{a+b\sqrt[3]{2}}(x) = (x-a)^3 - 2b^3$ (сделали линейную замену $x \mapsto \frac{x-a}{b}$ и умножили

на b^3). Получаем противоречие:

$$x^3 - 3 = (x-a)^3 - 2b^3 = x^3 - 5ax^2 + \dots \Rightarrow a = 0.$$

Задача 10. Решите уравнение в натуральных числах: $\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n} = 2021$.

В общем случае путь к минимальному многочлену правой части равенства (12) лежит через *сопряженные числа*. Вот только что это такое, мы определили пока лишь для квадратичных иррациональностей, и в конце §2 наметили рассуждение с переходом к сопряженным.

Еще немного теории. Пусть число $\alpha \in \mathbb{C}$ алгебраично над полем K и

$$\mu_\alpha(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_k)$$

(согласно основной теореме алгебры любой многочлен над $\mathbb{C}$ раскладывается на линейные множители)⁴. Числа $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ называются *сопряженными с α над K* . Обозначим их сумму $\sigma(\alpha)$. По теореме Виета

$$\sigma(\alpha) = \alpha_1 + \dots + \alpha_k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mu_\alpha(x) = x^k - \sigma(\alpha)x^{k-1} + \dots \quad (13)$$

Пример 7 показывает, что именно коэффициент $-\sigma(\alpha)$ будет играть ключевую роль.

Замечание. Числа $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ различны (для доказательства это не нужно): если $\mu_\alpha(x) = (x - \alpha_j)^2 g(x)$, то производная $\mu'_\alpha(x) = 2(x - \alpha_j)g(x) + (x - \alpha_j)^2 g'(x) \in K[x]$ имеет корень α_j , хотя $\deg \mu'_\alpha < \deg \mu_\alpha$.

Ввиду пункта 4) теоремы 3 все алгебраические над K числа разбиваются на классы сопряженных, каждый из которых состоит из корней какого-то неприводимого над K многочлена.

Пример 8. Разложим двучлен $x^4 - 2$ на неприводимые и разобьем его корни на классы сопряженных над каждым из полей $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$ (рис. 4).

⁴ Мы этим пользоваться не будем: в доказательстве все многочлены раскладываются явно.

$$\begin{array}{c}
 \mathbb{Q}: \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}): \\
 x^4 - 2 \quad (x^2 - \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}) \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline \sqrt[4]{2} & i\sqrt[4]{2} \\ \hline -\sqrt[4]{2} & -i\sqrt[4]{2} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \sqrt[4]{2} & i\sqrt[4]{2} \\ \hline -\sqrt[4]{2} & -i\sqrt[4]{2} \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}): \\
 (x - \sqrt[4]{2})(x + \sqrt[4]{2})(x^2 + \sqrt{2}) \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline \sqrt[4]{2} & i\sqrt[4]{2} \\ \hline -\sqrt[4]{2} & -i\sqrt[4]{2} \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i): \\
 (x - \sqrt[4]{2})(x + \sqrt[4]{2})(x - i\sqrt[4]{2})(x + i\sqrt[4]{2}) \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline \sqrt[4]{2} & i\sqrt[4]{2} \\ \hline -\sqrt[4]{2} & -i\sqrt[4]{2} \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

Рис. 4

Пример 9. Для квадратичных иррациональностей $a \pm b\sqrt{d}$ ($a, b, d \in K$, $b \neq 0$, $\sqrt{d} \notin K$) получается привычное понятие сопряженности:

$$\mu_{a \pm b\sqrt{d}}^K(x) = x^2 - 2ax + a^2 - db^2, \quad \sigma(a \pm b\sqrt{d}) = 2a.$$

(Кстати, при $K = \mathbb{R}$ и $d = -1$ получаем комплексно-сопряженные числа $a \pm bi$.) Это спасает приведенное выше обоснование перехода от (3) к (4).

Пример 10. Пусть $a, b \in \mathbb{Q}$, $b \neq 0$. Числа $a \pm b\sqrt[k]{2}$, конечно, не будут сопряженными при $k > 2$ (по аналогии с квадратичными иррациональностями). Сопряженные с числом $a + b\sqrt[k]{2}$ суть корни многочлена $\mu_{a+b\sqrt[k]{2}}(x) = (x - a)^k - 2b^k$ (аналогично примеру 7), т.е. числа $a + b\sqrt[k]{2}\varepsilon^j$, $j = 0, \dots, k-1$ (пример на рисунке 5). Знак $\pm$ при $k = 2$ объясняется тем, что $\varepsilon_2 = -1$.

Рис. 5

Лемма 5. Пусть K – подполе в $\mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$, $r \notin K$, $r^k \in K$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\sigma(r) = 0$.

Шаг 4: переход к сопряженным числам. Пример 10 подсказывает вид сопряженных к числу вида (10).

Задача 11. Опровергните равенство $\sqrt[3]{3} = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, где $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Для этого, обозначив $f(x) = a + bx + cx^2$ и $\varepsilon = \varepsilon_3$, покажите, что сопряженные с правой частью суть

$$f(\sqrt[3]{2}) = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4},$$

$$f(\sqrt[3]{2}\varepsilon) = a + b\sqrt[3]{2}\varepsilon + c\sqrt[3]{4}\varepsilon^2,$$

$$f(\sqrt[3]{2}\varepsilon^2) = a + b\sqrt[3]{2}\varepsilon^2 + c\sqrt[3]{4}\varepsilon.$$

Лемма 6. Пусть $\alpha_1 = \alpha, \dots, \alpha_k$ – все сопряженные с числом α , алгебраичным над полем K , и $f \in K[x]$. Тогда число $f(\alpha)$ алгебраично над K и для некоторого $d \in \mathbb{N}$

$$\mu_{f(\alpha)}(x)^d = (x - f(\alpha_1)) \dots (x - f(\alpha_k)). \quad (14)$$

Приравняв суммы корней (с кратностями) многочленов в равенстве (14):

$$d\sigma(f(\alpha)) = f(\alpha_1) + \dots + f(\alpha_k).$$

Нас интересует случай $\mu_\alpha(x) = x^k - \alpha^k$, тогда $\alpha_j = \alpha\varepsilon^{j-1}$, $j = 1, \dots, k$. Для многочлена $f(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_{k-1}x^{k-1}$ имеем

$$f(\alpha) = c_0 + c_1\alpha + \dots + c_{k-1}\alpha^{k-1},$$

$$f(\alpha\varepsilon) = c_0 + c_1\alpha\varepsilon + \dots + c_{k-1}\alpha^{k-1}\varepsilon^{k-1},$$

...

$$f(\alpha\varepsilon^{k-1}) = c_0 + c_1\alpha\varepsilon^{k-1} + \dots + c_{k-1}\alpha^{k-1}\varepsilon^{(k-1)^2}.$$

Сложим числа в каждом столбике. Так как $\varepsilon^k = 1$, то при $j = 1, \dots, k-1$

$$1 + \varepsilon^j + \varepsilon^{2j} + \dots + \varepsilon^{(k-1)j} = \frac{1 - \varepsilon^{kj}}{1 - \varepsilon^j} = 0.$$

Значит, $f(\alpha) + f(\alpha\varepsilon) + \dots + f(\alpha\varepsilon^{k-1}) = kc_0$, откуда

$$\sigma(c_0 + c_1\alpha + \dots + c_{k-1}\alpha^{k-1}) = \frac{k}{d} \cdot c_0. \quad (15)$$

Наконец мы готовы привести равенство (12) к противоречию. Пусть A_j – первый ненулевой коэффициент в ряду $A_0, \dots, A_{k-1}$. Разделим равенство (12) на r_{n-1}^j :

$$\frac{r_n^l}{r_{n-1}^j} = A_j + A_{j+1}r_{n-1} + \dots + A_{k-1}r_{n-1}^{k-j-1}. \quad (16)$$

Пусть $K = \mathbb{Q}(r_1, \dots, r_{n-2})$, $R = r_n^l / r_{n-1}^j$. Тогда $R \notin K$, иначе $R = A_j$ и $A_{j+1} = \dots = A_{k-1} = 0$ ввиду линейной независимости $1, r_{n-1}, \dots, r_{n-1}^{k-1}$ над K (напомним, среди чисел $A_j, \dots, A_{k-1}$ хотя бы два ненулевых). При этом $R^k = p_n^l / p_{n-1}^j \in \mathbb{Q}$, поэтому $\sigma(R) = 0$ по лемме 5. В то же время значение σ от правой части (16), согласно (15), пропорционально A_j (играющего роль c_0), а потому не равно 0. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 2.

Фактически мы доказали большее: каждое число в поле $\mathbb{Q}(r_1, \dots, r_n)$ представляется в виде линейной комбинации k^n чисел

$$r_1^{l_1} \dots r_n^{l_n}, \text{ где } 0 \leq l_1, \dots, l_n < k,$$

с однозначно определенными рациональными коэффициентами. На языке векторов, эти числа образуют *базис* поля $\mathbb{Q}(r_1, \dots, r_n)$ над $\mathbb{Q}$. Такое представление достигается избавлением от иррациональности в знаменателе, а однозначность коэффициентов равносильна линейной независимости данной системы.

Короткое доказательство с помощью следа. Используя чуть больше сведений об алгебраических числах либо владея началами линейной алгебры, можно совсем коротко доказать теорему 1 (не сводя ее к теореме 2). В основе рассуждения также лежит некоторая величина, пропорциональная сумме сопряженных. Но при

этом она обладает замечательным свойством линейности, благодаря чему техника сводится к минимуму.

Функция $f: L \rightarrow \mathbb{C}$, где L – подполе в $\mathbb{C}$, называется *линейной* (точнее, $\mathbb{Q}$ -линейной), если $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$ для всех $x, y \in L$ и $a, b \in \mathbb{Q}$. Пусть $L = \mathbb{Q}(\sqrt[k_1]{Q_1}, \dots, \sqrt[k_N]{Q_N})$. В §4 мы покажем, что существует линейная функция $\text{tr}: L \rightarrow \mathbb{C}$, называемая следом (от англ. trace – след), которая обладает свойством:

для каждого $\alpha \in L$ найдется такое $d \in \mathbb{N}$, что $\text{tr}(\alpha) = d\sigma(\alpha)$ (17)

($\sigma(\alpha)$ определено в (13)). Предположим, что $a_1\sqrt[k_1]{Q_1} + \dots + a_N\sqrt[k_N]{Q_N} = 0$, где $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{Q}$ не все равны 0. Будем считать, что $a_N \neq 0$. Неожиданным образом уединим не радикал, а коэффициент. Разделим обе части на $\sqrt[k_N]{Q_N}$ и обозначим $R_i = \sqrt[k_i]{Q_i} / \sqrt[k_N]{Q_N}$, $i = 1, \dots, N-1$:

$$-a_N = a_1R_1 + \dots + a_{N-1}R_{N-1}. \quad (18)$$

Так как $R_i^{k_i k_N} \in \mathbb{Q}$ и по условию $R_i \notin \mathbb{Q}$, то $\sigma(R_i) = 0$ по лемме 5, а тогда $\text{tr}(R_i) = 0$ в силу (17). Отсюда в силу линейности след от правой части равенства (18) равен 0. В то же время $\sigma(-a_N) = -a_N \neq 0$ и по (17) $\text{tr}(-a_N) \neq 0$. Это противоречие завершает доказательство теоремы 2.

(Продолжение следует)

Литература

1. Э.Б.Винберг. Курс алгебры. – М.: МЦНМО, 2019.
2. Л.Камнев. Иррациональность суммы радикалов. – «Квант», 1972, №2.
3. А.Канунников. Алгебра и геометрия комплексных чисел. – «Квант», 2017, № 5,6.
4. А.Л.Канунников. Алгебраические числа как векторы. – Математическое просвещение, сер.3, вып.26, 2020, с.91–122.
5. В.Олейников. Иррациональность и неприводимость. – «Квант», 1986, №10.
6. В.А.Уфнаровский. Математический аквариум. – М.:МЦНМО, 2010.
7. I.Richards. An Application of Galois Theory to Elementary Arithmetic. – Advances in Mathematics, 13, 1974, p. 268–273.