Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Дворянинов, Как Толик Втулкин физикой увлекся, *Квант*, 2021, номер 3, 34–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20210303>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 15:12:28

Как Толик Втулкин физикой увлекся

С.ДВОРЯНИНОВ

В ШКОЛЕ ТОЛИК ВТУЛКИН ВНАЧАЛЕ увлекался ботаникой. Началась она в пятом классе, а ему с раннего детства нравилось бывать в саду или на огороде. Особенно в жаркий день, когда в любом месте он мог устроить себе душ водой из шланга. Это он называл «полить огород». А еще у Толика была обязанность – наливать воду в прямоугольный железный бак, чтобы она за день на солнце нагрелась.

Но заполнить бак водой до самых краев никак не удавалось. Причина простая – бак стоял «неровно», он был наклонен в одну сторону, и вода переливалась через край. Вот с этого все и началось.

– Почему это бак не падает набок? – удивился было Толик. – Ведь на одну его стенку вода давит сильнее, чем на все остальные.

Ответ на этот вопрос он нашел быстро. А потом, лежа в тени под яблоней, начал размышлять о баке с водой на наклонной плоскости, о которой говорили на уроке физики.

Бак-куб на наклонной плоскости

Представим себе, что на наклонной плоскости стоит пустой железный бак в форме куба без крышки, а невысокий горизонтальный бортик удерживает его от скольжения. (Или трение столь велико, что скользить бак по плоскости не может.) При этом ребро основания бака упирается в бортик. Начнем увеличивать угол наклона этой плоскости. Ясно, что в некоторый момент бак опрокинется, вращаясь вокруг бортика. А насколько большим должен быть для этого опрокидывания угол наклона плоскости?

Пусть ребро бака равно a . Бак будем считать тонкостенным, ρ – его поверхност-

Рис. 1

ная плотность. Посмотрим на бак сбоку, можно сказать – в профиль. В проекции увидим квадрат, а бортик и упирающееся в него ребро основания превратятся в точку O (рис.1). Плечо силы тяжести дна бака, т.е. расстояние от центра дна до вертикали, проходящей через точку O , равно $\frac{a}{2} \cos \alpha$, сила тяжести дна равна $\rho a^2 g$, момент силы тяжести дна равен

$$M_d = \rho a^2 g \cdot \frac{a}{2} \cos \alpha.$$

Плечо силы тяжести боковой поверхности бака относительно той же точки, т.е. расстояние от центра квадрата до той же вертикали, равно $\frac{a \sin \alpha - a \cos \alpha}{2}$, сила тяжести боковой равна $\rho \cdot 4a^2 g$, ее момент равен

$$M_6 = 4\rho a^2 g \cdot \frac{a \sin \alpha - a \cos \alpha}{2}.$$

Например, если $\alpha = 45^\circ$, то этот момент равен нулю (рис.2). Бак устойчиво стоит на

Рис. 2

наклонной плоскости. Будем наливать в этот бак воду. Когда половина объема бака заполнится, вода начнет из него выливаться.

Условие опрокидывания бака таково:

$$M_6 > M_d, \text{ или (после сокращения на } \frac{\rho a^3 g}{2})$$

$$4(\sin \alpha - \cos \alpha) > \cos \alpha, \text{ т.е. } \operatorname{tg} \alpha > \frac{5}{4}.$$

Итак, пустой бак опрокинется, если его поставить на наклонную плоскость с углом $\alpha > \arctg \frac{5}{4}$. В случае равенства моментов бак находится в положении неустойчивого равновесия (см. рис.1).

Квадратный бак на наклонной плоскости

Пусть теперь на наклонной плоскости с углом α находится бак высотой h со стороны основания a . Угол наклона плоскости начинаем медленно увеличивать. Для каких значений угла α бак не опрокинется?

Как и прежде, масса дна бака равна ρa^2 , плечо его силы тяжести относительно точки

O равно $\frac{a}{2} \cos \alpha$, момент силы тяжести дна равен $\rho a^2 g \cdot \frac{a}{2} \cos \alpha$. Масса боковой поверхности бака равна $\rho \cdot 4ah$, плечо ее силы тяжести относительно точки O равно $\frac{h \sin \alpha - a \cos \alpha}{2}$. Бак не опрокинется до тех пор, пока будет выполнено неравенство

$$4\rho ahg \frac{h \sin \alpha - a \cos \alpha}{2} \leq \rho a^2 g \frac{a}{2} \cos \alpha.$$

Отсюда после упрощения получаем неравенство

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{a^2 + 4ha}{4h^2}, \text{ или } \operatorname{tg} \alpha \leq \left(\frac{a}{2h} \right)^2 + \frac{a}{h}.$$

В случае равенства центр масс бака расположен над точкой O , т.е. лежит на вертикали, проходящей через точку O , и бак находится в положении неустойчивого равновесия. При дальнейшем увеличении угла α бак опрокидывается.

Для кубического бака при $h = a$ получаем уже известное условие $\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{5}{4}$.

Заметим, что чем больше отношение a/h , т.е. чем более бак является плоским, тем на

более крутой наклонной плоскости он удерживается от опрокидывания.

Бак высотой h на наклонной плоскости с углом $\alpha = 45^\circ$

Рассмотрим другую причину опрокидывания бака — для наклонной плоскости он оказывается чрезмерно высоким. Пусть плоскость наклонена под углом 45° и квадратный бак высотой h имеет размеры $a \times a \times h$. При этом плечо силы тяжести его боковой поверхности равно $\frac{h-a}{2\sqrt{2}}$. Приравнявая два момента сил тяжести, получаем после упрощения условие неустойчивого равновесия такого бака:

$$4ah \cdot \frac{h-a}{2\sqrt{2}} = a^2 \cdot \frac{a}{2\sqrt{2}}, \text{ или}$$

$$4h^2 - 4ah - a^2 = 0.$$

Отсюда находим

$$h = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} a.$$

При меньшей высоте бак устойчиво стоит на наклонной плоскости с углом 45° .

Если в пустой бак высотой $h = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} a$ наливать воду, то неустойчивое равновесие будет сначала сохраняться. Но как только дно бака окажется в воде, бак опрокинется.

Круглая бочка на наклонной плоскости

Допустим, что на наклонной плоскости с углом α находится пустая открытая сверху тонкостенная круглая бочка цилиндрической формы (рис.3). Высота бочки h , радиус основания R . Как и раньше, бочку удерживает от скольжения невысокий горизонтальный бортик. Угол наклона плоскости начинаем медленно увеличивать. Для каких значений угла α бочка не опрокинется?

Пусть бочка касается бортика в точке O и ρ — поверхностная плотность бочки. Тогда

Рис. 3

масса дна бочки равна $\rho\pi R^2$, плечо его силы тяжести относительно точки O равно $R \cos \alpha$, момент силы тяжести дна бочки равен $\rho\pi R^2 g \cdot R \cos \alpha$. Масса боковой поверхности бочки равна $\rho \cdot 2\pi R h$. Плечо ее силы тяжести относительно точки O , т.е. расстояние от геометрического центра цилиндра до вертикали, проходящей через точку O , равно $\frac{h \sin \alpha - 2R \cos \alpha}{2}$.

Бочка не опрокинется до тех пор, пока будет выполнено неравенство

$$\rho \cdot 2\pi R h g \frac{h \sin \alpha - 2R \cos \alpha}{2} \leq \rho\pi R^2 g R \cos \alpha.$$

Отсюда после преобразований получаем

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{R^2 + 2hR}{h^2}, \text{ или } \operatorname{tg} \alpha \leq \left(\frac{R}{h}\right)^2 + 2\frac{R}{h}.$$

В случае равенства центр масс бочки расположен над точкой касания бочки с бортиком. При дальнейшем увеличении угла α бочка опрокинется.

Неравенство показывает, что чем больше отношение R/h , т.е. чем более бочка является плоской, тем на более крутой наклонной плоскости она удерживается от опрокидывания. Это хорошо известно из опыта. На рисунке 4 показан частный случай: $R = h$ и $\operatorname{tg} \alpha = 3$. При этом масса боковой поверхности бочки в два раза больше массы ее дна и плечи их сил тяжести (красные отрезки) тоже отличаются в два раза.

Рис. 4

Сравним устойчивость бочки с диаметром основания $2R = a$ и квадратного бака со стороной основания a и с одной и той же высотой h . Для бочки условие устойчивости принимает вид

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{R^2 + 2hR}{h^2} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2h\frac{a}{2}}{h^2} = \frac{a^2 + 4ha}{4h^2},$$

что полностью совпадает с условием устойчивости бака. Иными словами, бочка и бак устойчивы в равной мере.

Что такое катастрофа

Рассмотрим очень тонкостенный кубический бак, стоящий на наклонной плоскости с углом $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{4,5}{4}$ (рис.5). Бак находится в состоянии устойчивого равновесия, потому что его центр масс находится правее вертикали, проходящей через точку O . Вообразим, что в этот бак по каплям льется вода. По рисунку видно, что центр масс воды в любой момент времени находится слева от вертикали, проходящей через точку O . С каждой новой каплей воды центр масс системы бак + вода будет смещаться все левее.

(Продолжение см. на с. 41)

Рис. 5

Анализ таблиц 10×10 и 10×11

Оказывается, примера плохой раскраски 11×11 не существует, т.е. пара $(11, 11)$ хорошая. На самом деле, даже пара $(10, 11)$ хорошая, но для доказательства недостаточности оценки (5). Приведем план доказательства, оставив детали читателю в виде задачи. Предположим, нам удалось построить плохую раскраску K размера 10×11 . Ребер каждого цвета в мультиграфе $G(K)$ не более $C_{10}^2 = 45$. Клеток какого-то цвета, скажем синего, в S хотя бы 37 (так как $36 \times 3 = 108$). Если их ровно 37 и они распределены по столбцам равномерно, то среди них 4 четверки и 7 троек, и тогда синих ребер ровно $4C_4^2 + 7C_3^2 = 45$.

Задача 4. Докажите, что при любом другом распределении синих клеток по столбцам синих ребер было бы больше.

Итак, можно считать, что в столбцах $A-D$ по 4 синих клетки, а в остальных – по 3.

Задача 5. Докажите, что среди столбцов $A-D$:

а) любые два имеют ровно одну общую (с тем же номером) синюю клетку;

б) никакие три не имеют общей синей клетки.

Таким образом, можно считать, что синие клетки в столбцах $A-D$ расположены, как на рисунке 10. Галочками отмечены строки, в которых две синие клетки. Эти строки назовем *темными*, а остальные – *светлыми*. Попробуем покрасить в одном из оставшихся столбцов три клетки синим цветом, чтобы не получилось синего прямоугольника.

Задача 6. Докажите, что при этом хотя бы две из трех синих клеток будут в светлых строках.

Поскольку светлых строк всего 4, то из них можно образовать лишь $C_4^2 = 6$ пар, поэтому среди семи последних столбцов обязательно найдутся два с общей парой синих клеток. Итак, любая таблица 10×11 хорошая.

Пример плохой таблицы 10×10 мы нашли с помощью компьютера (рис. 11).

Собирая все вместе, получаем следующую теорему.

Рис. 11

Теорема 2. При раскраске в три цвета хорошими являются в точности следующие пары:

$$(m, n) \geq (4, 19), (6, 16), (9, 13), (10, 11).$$

Задача 7. Рассмотрим такую же задачу для k цветов. Докажите, что пары $(k+1, k^2(k+1)/2)$ и (k^2+k, k^2+k) хорошие.

Задача 8. Пусть q — степень простого числа. Докажите, что для q цветов пара $(q^2, q^2 + q)$ плохая. (Если вы не знаете других конечных полей, кроме полей вычетов, считайте, что q — простое.)

Литература

1. *А.Райгородский*. Задачи о пересечениях множеств. – «Квант», 2016, №5–6.
2. *М.Горелов*. Абстрактная математика волейбольного турнира. – «Квант», 2015, №2.

(Начало см. на с. 34)

Ясно, что наступит момент, когда этот центр масс окажется слева от точки O . С поступлением этой последней капельки бак с водой начнет опрокидываться. И чем дальше, тем быстрее. Вот это явление потери устойчивости и называется катастрофой.

Задачи для самостоятельного решения

1. Один и тот же квадратный бак, стоящий на наклонной плоскости, в одном случае упирается в бортик ребром основания, а в другом – углом основания (ребра основания образуют угол 45° с бортиком). В каком случае бак более устойчив?

2. В школьном саду квадратный бак, стоящий на наклонной плоскости, заполняли водой до тех пор, пока вода не стала выливаться из бака. Толик Втулкин утверждает, что в этот бак, не убирая его с этой плоскости, можно влить еще больше воды. Может ли утверждение Толика Втулкина быть верным?

Рис. 10