Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Боаг, Л. Радзиловский, Раскраска таблицы в три цвета,
Квант, 2021, номер 3, 37–41

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20210304>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 12:11:50

Раскраска таблицы в три цвета

А. БОАГ, Л. РАДЗИВИЛОВСКИЙ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ РАЗБЕРЕМ одну комбинаторную задачу так называемого *рамсеевского* типа и на ее примере продемонстрируем множество интересных идей и методов – от принципа Дирихле до небольшого путешествия в аффинную геометрию над конечным полем.

Рассмотрим таблицу $m \times n$ (m строк и n столбцов), где $m, n > 1$, и раскраски такой таблицы, при которых каждая клетка покрашена в один из данных k цветов. Назовем раскраску *хорошей*, если найдется прямоугольник, угловые клетки которого покрашены в один цвет (здесь и далее длина и ширина прямоугольника больше 1). Остальные раскраски назовем *плохими*. Задача: для фиксированного $k > 1$ выяснить, при каких m и n любая раскраска – хорошая. Такие пары (m, n) назовем *хорошими*, а остальные пары – *плохими*.

Например, любая пара вида (k, n) всегда будет плохой (напомним, что k – число цветов, а не произвольное число). Действительно, у таблицы $k \times n$ есть плохая раскраска: каждая строка покрашена в свой цвет. С другой стороны, интуиция подсказывает, что пары (m, n) , в которых и m и n достаточно велики, должны быть хорошими: в большой таблице прямоугольник какого-то цвета уж точно должен найтись! Сравните с другой классической задачей: среди любых шести людей на земном шаре обязательно найдутся трое попарно знакомых или трое попарно незнакомых. Такого рода вопросы относятся к *теории Рамсея*. Эта теория изучает условия, при которых в достаточно больших математических объектах обязательно появляется фрагмент данного вида. Другие интересные задачи в духе теории Рамсея можно найти в статье [1].

Начнем с простых соображений, верных для любого фиксированного k .

– Пары (m, n) и (n, m) хорошие (плохие) одновременно.

– Свойство раскраски быть хорошей или плохой не зависит от перестановок строк и перестановок столбцов.

– Введем порядок на парах:

$$(m', n') \geq (m, n) \Leftrightarrow (m' \geq m \text{ и } n' \geq n) \\ \text{или } (m' \geq n \text{ и } n' \geq m). \quad (1)$$

Если пара (m, n) хорошая, то хорошие также все пары $(m', n') \geq (m, n)$.

Уже для четырех цветов нам ответ неизвестен. Для трех цветов мы опишем все хорошие пары. Начнем с более простого случая.

Случай двух цветов

Пусть цветов всего два: белый и синий. Будем увеличивать число m строк и каждый раз находить наименьшее $n \geq m$, при которых пара (m, n) – хорошая (если такое n существует). Как отмечалось выше, все пары $(2, n)$ плохие.

При $m \geq 3$ в каждом столбце есть хотя бы две клетки одного цвета. Поэтому всякая раскраска с двумя одинаковыми столбцами – хорошая. Поскольку всего различных столбцов 2^m , то все пары (m, n) , где $m \geq 3$, $n > 2^m$, хорошие. В частности, при $m = 3$ есть всего 8 разных столбцов высоты 3, так что пара $(3, 9)$ хорошая. Далее, в таблице 3×7 с различными столбцами обязательно есть одноцветный столбец, скажем синий. Поэтому, если раскраска плохая, то в остальных столбцах может быть максимум одна синяя клетка, а таких столбцов всего 4. Значит, любая раскраска доски 3×7 – хорошая, т.е. $(3, 7)$ – хорошая пара. А пара $(3, 6)$ уже плохая, так как даже пара $(4, 6)$ плохая: пример плохой раскраски показан на рисунке 1. Столбцы в ней представляют все 6 сочетаний из 4 по 2 (в каждом столбце ровно две синие клетки).

	■	■			
			■	■	
■					■
■	■			■	■

Рис. 1

Для полного описания хороших пар осталось исследовать пару $(5, 5)$.

Задача 1. Докажите, что пара $(5, 5)$ хорошая (для двух цветов).

Теорема 1. При раскраске в два цвета хорошими являются в точности следующие пары:

$$(m, n) \geq (3, 7), (5, 5).$$

Далее будем решать задачу для $k = 3$. Выведем теорему, аналогичную теореме 1. «Пороговых» пар, аналогичных парам $(3, 7)$ и $(5, 5)$, будет больше. Теперь случай $m = 3$ тривиален: все пары $(3, n)$ плохие. Аналогично случаю двух цветов, пары (m, n) , где $m \geq 4$ и $n > 3^m$, хорошие. Но эта оценка на n слишком грубая. Займемся ее усилением.

Мультиграф раскраски

Пусть дана некоторая раскраска K таблицы $m \times n$. Сопоставим ей мультиграф $G(K)$ по следующему правилу (в отличие от графа, в мультиграфе две вершины могут соединяться несколькими ребрами). Вершинами в $G(K)$ будут номера строк $1, \dots, m$ нашей таблицы. Если столбец X пересекает i -ю и j -ю строки по клеткам одного цвета, то соединим вершины i и j ребром с меткой X (причем если эти две клетки, скажем, синие, то и ребро будем называть синим, однако цвета ребер нас будут редко интересовать). Пример соответствия таблицы и мультиграфа показан на рисунке 2 (белым клеткам

Рис. 2

соответствуют черным ребрам). Число ребер в полученном мультиграфе обозначим $P(K)$.

Возьмем две строки i и j в какой-нибудь плохой раскраске K . Максимум один столбец может пересекать их по белым клеткам, максимум один — по синим и максимум один — по красным. Поэтому в мультиграфе $G(K)$ вершины i и j могут быть соединены максимум тремя ребрами. Поскольку всего пар вершин $C_m^2 = m(m-1)/2$, мы получаем верхнюю оценку на число ребер:

$$P(K) \leq 3m(m-1)/2 \text{ для любой}$$

плохой раскраски K таблицы $m \times n$. (2)

А теперь оценим $P(K)$ снизу. Какой бы ни была раскраска K (хорошей или плохой),

Рис. 3

при $m \geq 4$ в каждом столбце есть две клетки одного цвета. В терминах нашего мультиграфа это значит, что в нем будут ребра, помеченные всеми n столбцами. Значит,

$$P(K) \geq n \text{ для любой раскраски } K$$

таблицы $m \times n$, где $m \geq 4$. (3)

При $m = 4$ оценки (2) и (3) дают неравенство для плохих раскрасок: $n \leq P(K) \leq 18$. Существует ли плохая раскраска при $n = 18$? Если да, то обе оценки (2) и (3) обращаются в равенства, т.е. в каждом столбце есть клетки всех цветов и любые две строки имеют ровно одну общую клетку каждого цвета. Один из примеров показан на рисунке 3. Итак, пара $(4, n)$ — хорошая тогда и только тогда, когда $n \geq 19$.

Неравенство между числом столбцов и числом ребер

Усилим неравенство (3), дающее хорошую оценку лишь при $m = 4$.

Для этого точнее оценим вклад каждого столбца в общее число ребер. Для примера рассмотрим таблицу на рисунке 4.

Рис. 4

Столбец A «соединяет» все

$$C_5^2 = 10 \text{ пар строк, столбец } B -$$

$C_4^2 = 6$ пар строк (с 1 по 4), столбец $C - 3 + 1 = 4$ пары, столбец $D -$ три пары, столбец $E -$ две пары. С точностью до переименования цветов и порядка строк мы перебрали все варианты столбцов высоты 5. Как видим, каждый соединяет хотя бы две пары строк, а потому $P(K) \geq 2n$ при $m = 5$.

Вообще, пусть в столбце высоты m имеется x белых, y красных и z синих клеток. Тогда он соединяет

$$C_x^2 + C_y^2 + C_z^2 = \frac{(x(x-1) + y(y-1) + z(z-1))}{2} \quad (4)$$

строк. Нас интересует минимум $f(m)$ этого выражения при условии $x + y + z = m$: раз в каждом из n столбцов хотя бы $f(m)$ пар одинаково раскрашенных клеток, то в муль-

тиграфе ребро, помеченное любым из n столбцов, встретится хотя бы $f(m)$ раз. Это дает оценку

$$P(K) \geq nf(m) \text{ для любой раскраски } K \text{ таблицы } m \times n, \text{ где } m \geq 4. \quad (5)$$

С учетом обратной оценки (2) отсюда заключаем, что

$$\text{все пары } (m, n), \text{ где } m \geq 4, \\ n > \lceil 3m(m-1)/2f(m) \rceil, \text{ — хорошие} \quad (6)$$

(здесь квадратными скобками обозначена целая часть числа).

Интуиция и пример с $m = 5$ подсказывают, что минимум $f(m)$ выражения (4) достигается, когда числа x, y, z «примерно равны». Идея в том, что если какие-то два из этих чисел сильно различаются, то их можно сблизить с сохранением суммы, отчего значение выражения (4) уменьшится (это иллюстрирует рисунок 5). Кстати, это общее свойство выпуклых функций. Сформулируем четкое утверждение и предложим читателю его аккуратно доказать. Благо мы имеем дело с совсем простой, квадратичной функцией.

Задача 2. Докажите, что минимум выражения (4) при условии $x + y + z = m$ достигается, когда числа x, y, z отличаются не более чем на 1 (x, y, z — целые неотрицательные числа).

Такое разбиение числа m назовем равномерным.

Составим таблицу:

m	Равномерное разбиение $m = x + y + z$	$f(m)$	$\lceil \frac{3m(m-1)}{2f(m)} \rceil$
4	2 + 1 + 1	1	18
5	2 + 2 + 1	2	15
6	2 + 2 + 2	3	15
7	3 + 2 + 2	5	12
8	3 + 3 + 2	7	12
9	3 + 3 + 3	9	12
10	4 + 3 + 3	12	11
11	4 + 4 + 3	15	11

Мы остановились на $m = 11$, так как верхняя граница для n тогда тоже 11. Мы бы завершили решение, если бы привели при-

меры плохих раскрасок размеров 6×15 , 9×12 и 11×11 . Первые два примера мы построим и покажем, как до них догадаться, а вот с последним случаем все не так просто. Но обо всем по порядку.

Пример 6×15 : турнирная таблица

Поскольку минимум $f(6) = 2$ достигается лишь на равномерном разбиении $6 = 2 + 2 + 2$, то в плохой раскраске 6×15 каждый столбец содержит по две клетки каждого цвета, причем одна и та же пара клеток в разных столбцах не может быть покрашена одним цветом. Такую таблицу можно интерпретировать как турнирную для своеобразного троеборья между шестью участниками. Строки таблицы — игроки 1, ..., 6. Каждый столбец — это раунд, в котором белые клетки обозначают играющих в шахматы, красные — в шашки, синие — в нарды. При этом за весь турнир каждая пара играет между собой в каждую игру по разу. Как раз получается $15 = 5 \times 3$ раундов: каждый играет с пятью другими в три игры. Как же составить такую таблицу?

Начнем с построения более простой таблицы — для шахматного турнира между шестью игроками, имеющими три доски. Нужно разбить их на пары пятью способами, чтобы каждый побывал в паре с каждым ровно один раз. Для этого есть простая геометрическая картинка. Возьмем вершины правильного пятиугольника и его центр — всего 6 точек, они обозначают участников. Эти точки разбиваются ровно пятью способами на такие пары: сторона, параллельная ей диагональ, две оставшиеся точки (рис. 6).

Рис. 6

Задача 3. Обобщите описанную конструкцию на любое число шахматистов $2n$ или $2n + 1$, имеющих n досок и желающих провести однокруговой турнир за наименьшее число туров.

Теперь превратим таблицу 6×5 для шахматного турнира в искомую таблицу 6×15 для троеборья. Каждый столбец шахматной таблицы — это просто разбиение на пары A, B и C . Объявим, что в первом туре пара A играет в шахматы, пара B — в шашки, пара C — в нарды. Во втором туре те же пары

Рис. 7

играют в игры, сдвинутые по циклу: A – в шашки, B – в нарды, C – в шахматы. Наконец, в третьем туре сделаем цикл еще раз: A – в нарды, B – в шахматы, C – в шашки. Прodelав эту процедуру с каждым столбцом шахматной таблицы 6×5 , получим искомую раскраску 6×15 , пример приведен на рисунке 7.

Пример 9×12 : конечная аффинная геометрия

В плохой таблице 9×12 в каждом столбце должно быть по три клетки каждого цвета (минимум $f(9) = 12$ достигается лишь на разбиении $9 = 3 + 3 + 3$). Построить такую таблицу поможет аффинная геометрия над полем $\mathbb{Z}_3 = \{-1, 0, 1\}$. Пугаться не стоит. Сейчас все объясним по-простому.

Рис. 8

Сопоставим каждой строке точку (x, y) на плоскости с координатами $x, y \in \{0, 1, -1\}$, которые складываются, вычитаются и умножаются по модулю 3 (рис.8). Например, $1 + 1 = -1$, $(-1)(-1) = 1$. Прямые,

как обычно, задаются линейными уравнениями вида $y = ax + b$ и $x = c$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}_3$). Каждая прямая, тем самым, состоит из трех точек. Параллельные прямые – те, которые не пересекаются, т.е. вертикальные $x = b$, а также прямые первого вида с одинаковым угловым коэффициентом a и разными коэффициентами b . Всего получается 12 прямых, разбитых на 4 группы параллельных (4 направления). Возьмем любое такое разбиение на параллельные прямые и покрасим их в белый, синий и красный цвета произвольным образом. Перенесем цвет каждой точки в соответствующую ей клетку таблицы 9×4 , получим плохую раскраску. И даже «очень плохую» – в том смысле, что эта раскраска обладает более сильным свойством:

если в каком-то прямоугольнике угловые клетки в одном столбце одноцветны, то угловые клетки другого столбца обязательно разноцветны. (7)

Действительно, парам клеток каждого из четырех столбцов отвечают пары точек на соответствующем рисунке с параллельными прямыми. Если на одном рисунке точки одноцветны, то они лежат на одной из параллельных прямых, но тогда на другом рисунке те же точки лежат на разных параллельных прямых, а значит, покрашены в разные цвета.

Теперь сделаем из нашей таблицы 9×4 плохую таблицу 9×12 : для каждого столбца сделаем две копии и сдвинем в них цвета по циклу синий $\rightarrow$ белый $\rightarrow$ красный $\rightarrow$ синий

Рис. 9

(рис.9). Раскраска и впрямь плохая: если прямоугольник взят из одной группы скопированных столбцов, то его левые и правые углы покрашены в разные цвета, а иначе для него выполняется свойство (7).

Кстати, метод, которым мы построили таблицу 9×4 , используют для организации турнира со следующими условиями. В турнире всего q^2 участников, где q – степень простого числа (у нас $q = 3$). В каждом туре участники как-то разбиваются на q групп по q в каждой, внутри группы каждый играет с каждым, при этом за весь турнир каждый играет с каждым ровно один раз. Чтобы составить расписание разбиений на группы, используют описанную выше конструкцию с полем из q элементов вместо $\mathbb{Z}_3$. При простом q это просто поле вычетов по модулю q . Подробнее об этом рассказано в статье [2].

Анализ таблиц 10×10 и 10×11

Оказывается, примера плохой раскраски 11×11 не существует, т.е. пара $(11, 11)$ хорошая. На самом деле, даже пара $(10, 11)$ хорошая, но для доказательства недостаточности оценки (5). Приведем план доказательства, оставив детали читателю в виде задачи. Предположим, нам удалось построить плохую раскраску K размера 10×11 . Ребер каждого цвета в мультиграфе $G(K)$ не более $C_{10}^2 = 45$. Клеток какого-то цвета, скажем синего, в S хотя бы 37 (так как $36 \times 3 = 108$). Если их ровно 37 и они распределены по столбцам равномерно, то среди них 4 четверки и 7 троек, и тогда синих ребер ровно $4C_4^2 + 7C_3^2 = 45$.

Задача 4. Докажите, что при любом другом распределении синих клеток по столбцам синих ребер было бы больше.

Итак, можно считать, что в столбцах $A-D$ по 4 синих клетки, а в остальных – по 3.

Задача 5. Докажите, что среди столбцов $A-D$:

а) любые два имеют ровно одну общую (с тем же номером) синюю клетку;

б) никакие три не имеют общей синей клетки.

Таким образом, можно считать, что синие клетки в столбцах $A-D$ расположены, как на рисунке 10. Галочками отмечены строки, в которых две синие клетки. Эти строки назовем *темными*, а остальные – *светлыми*. Попробуем покрасить в одном из оставшихся столбцов три клетки синим цветом, чтобы не получилось синего прямоугольника.

Задача 6. Докажите, что при этом хотя бы две из трех синих клеток будут в светлых строках.

Поскольку светлых строк всего 4, то из них можно образовать лишь $C_4^2 = 6$ пар, поэтому среди семи последних столбцов обязательно найдутся два с общей парой синих клеток. Итак, любая таблица 10×11 хорошая.

Пример плохой таблицы 10×10 мы нашли с помощью компьютера (рис. 11).

Собирая все вместе, получаем следующую теорему.

Рис. 11

Теорема 2. При раскраске в три цвета хорошими являются в точности следующие пары:

$$(m, n) \geq (4, 19), (6, 16), (9, 13), (10, 11).$$

Задача 7. Рассмотрим такую же задачу для k цветов. Докажите, что пары $(k+1, k^2(k+1)/2)$ и (k^2+k, k^2+k) хорошие.

Задача 8. Пусть q — степень простого числа. Докажите, что для q цветов пара $(q^2, q^2 + q)$ плохая. (Если вы не знаете других конечных полей, кроме полей вычетов, считайте, что q — простое.)

Литература

1. *А.Райгородский*. Задачи о пересечениях множеств. – «Квант», 2016, №5–6.
2. *М.Горелов*. Абстрактная математика волейбольного турнира. – «Квант», 2015, №2.

(Начало см. на с. 34)

Ясно, что наступит момент, когда этот центр масс окажется слева от точки O . С поступлением этой последней капельки бак с водой начнет опрокидываться. И чем дальше, тем быстрее. Вот это явление потери устойчивости и называется катастрофой.

Задачи для самостоятельного решения

1. Один и тот же квадратный бак, стоящий на наклонной плоскости, в одном случае упирается в бортик ребром основания, а в другом – углом основания (ребра основания образуют угол 45° с бортиком). В каком случае бак более устойчив?

2. В школьном саду квадратный бак, стоящий на наклонной плоскости, заполняли водой до тех пор, пока вода не стала выливаться из бака. Толик Втулкин утверждает, что в этот бак, не убирая его с этой плоскости, можно влить еще больше воды. Может ли утверждение Толика Втулкина быть верным?

Рис. 10