Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Дворянинов, Закон Архимеда и закон сохранения энергии,
Квант, 2021, номер 5, 41–43

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20210505>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 13:44:35

Закон Архимеда и закон сохранения энергии

С.ДВОРЯНИНОВ

Рассмотрим такую задачу. Пусть имеется полый внутри кубик с длиной ребра a , грани которого сделаны из прочной и очень тонкой фольги. Этот кубик плавает на поверхности воды так, что четыре его ребра вертикальны (рис.1). Кубик сместили вниз по вертикали

Рис. 1

на расстояние x , при этом часть его оказалась в воде. Считая массу кубика равной нулю, надо найти совершенную при этом работу.

Дать однозначный ответ к задаче о погружении кубика в воду нельзя. Оказывается, ответ зависит от того сосуда, в который налита вода. Обсудим несколько случаев.

Бак заполнен водой до самого верха

В этом случае при малейшем погружении нашего кубика вода будет из бака выливаться, но уровень воды в баке будет оставаться неизменным. От него и будет отсчитывать глубину погружения. Эта глубина H_1 соответствует расстоянию от уровня воды до нижней грани кубика и равна x (рис.2). При этом через край бака выльется вода, объем которой a^2x и масса ρa^2x . Вначале центр масс этой воды находился на глубине $x/2$, следовательно, работа, совершенная по подъему этой воды до верхнего края бака, равна

Рис. 2

приращению ее потенциальной энергии:

$$A_1(x) = E_{п1} = \rho a^2 x \cdot g \cdot \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \rho a^2 g x^2.$$

Сила, необходимая для погружения тела в воду, является переменной и зависит от глубины погружения, поэтому

$$\int_0^x F_1(x) dx = \frac{1}{2} \rho a^2 g x^2.$$

Дифференцируя обе части этого равенства по x , находим

$$F_1(x) = \rho a^2 g x.$$

Сила $F_1(x)$ – это сила, противодействующая выталкивающей силе, т.е. силе Архимеда F_A . (Сила тяжести на наше тело не действует, оно невесомо.) Сила Архимеда направлена вверх и численно равна силе тяжести воды, вытесненной кубиком из бака. В повседневной жизни силу тяжести чаще называют весом. Заметим, что в данном случае *вытесненная вода* – эта вода, *вылитая из бака*. Давление со стороны воды на нижнюю грань кубика равно

$$p(x) = \frac{F_1(x)}{S} = \frac{\rho a^2 g x}{a^2} = \rho g x.$$

Оно действует вверх.

Пусть глубина погружения стала равной a . При дальнейшем перемещении кубика вниз вода из бака выливаться не будет, сила

Рис. 3

Архимеда теперь будет оставаться постоянной и равной $F_A = \rho a^3 g$. Графики на рисунке 3 показывают, как от глубины погружения зависят сила Архимеда и необходимая для ее преодоления работа.

Если сила Архимеда равна весу плавающего на поверхности воды тела (т.е. силе тяжести тела), то медленное перемещение тела вдоль горизонтали с малой скоростью требует малой силы. Если тело целиком находится в воде, то легко осуществить его перемещение и по вертикали. Каждый знает это из личного опыта: при выходе на берег после продолжительного плавания в море особенно заметно, как легко можно было двигать руками и ногами в воде по сравнению с необходимыми усилиями на суше.

Выражение для работы A_1 можно получить и по-другому. Ясно, что в нашем случае вода, заполняющая параллелепипед $a \times a \times x$, поднялась на уровень бака. Мысленно разделим всю воду на очень узкие вертикальные столбики, практически на материальные отрезки. Медленный поворот каждого столбика на 90° и приведение его в горизонтальное положение не требует никакой работы. Но теперь получается, что каждую точку такого столбика-отрезка (т.е. весь отрезок целиком) надо поднять на одну и ту же высоту $x/2$. Это равносильно тому, что на эту высоту надо поднять всю массу воды $\rho a^2 x$. Для исходного параллелепипеда высота была переменной, своей для каждой точки.

Вода из бака не выливается

Рассмотрим бак с водой, имеющий форму параллелепипеда. Его основание – квадрат со стороной $a\sqrt{K}$, $K > 1$, а высота бака большая, так что даже при полном погружении кубика в воду вода из бака не выливается.

Назовем начальный уровень воды в баке нулевым. Пусть под действием силы, приложенной к кубику и направленной вертикально вниз, кубик сместился вниз от нулевого уровня на расстояние x и частично оказался в воде (рис.4). При этом кубик «вытеснил» воду, объем которой равен $a^2 x$ и которая распределилась выше нулевого уровня. Теперь площадь поверхности воды стала равной $(K-1)a^2$. Пусть уровень воды в баке

Рис. 4

повысился на величину y . Согласно закону сохранения объема получаем, что $(K-1)a^2 y = a^2 x$, откуда

$$y = \frac{x}{K-1}.$$

При этом от нового уровня воды в баке кубик погрузился на глубину

$$H_2 = x + y = \frac{K}{K-1} x.$$

Пусть верхняя грань кубика в воду еще не попала, т.е.

$$H_2 = \frac{K}{K-1} x < a.$$

Тогда центр масс вытесненной кубиком воды сместился вверх по вертикали на

$$h = \frac{x+y}{2} = \frac{K}{2(K-1)} x.$$

Потенциальная энергия вытесненной воды получила при этом приращение

$$\begin{aligned} E_{n2} &= mgh = \frac{1}{2} \rho a^2 x \cdot g \cdot \frac{K}{K-1} x = \\ &= \frac{1}{2} \rho a^2 g \frac{K}{K-1} x^2. \end{aligned}$$

Именно такую работу

$$A_2(x) = \frac{1}{2} \rho a^2 g H_2 x = \frac{1}{2} \rho a^2 g \frac{K}{K-1} x^2$$

необходимо совершить для погружения кубика в воду на глубину x от начального уровня.

Работа A_2 зависит от x квадратичным образом: например, увеличение x в два раза требует вчетверо большей работы. С этим обстоятельством мы сталкиваемся на море или реке, когда пытаемся «утопить» резино-

Рис. 5

вый мяч. А вот с зависимостью работы от параметра K , т.е. от площади «зеркала» бака, мы встречаемся нечасто. График функции $f(K) = \frac{K}{K-1}$ показан на

рисунке 5. На бесконечном интервале $1 < K < +\infty$ эта функция убывает от $+\infty$ до 1.

Пусть бак с водой очень-очень узкий, чуть шире кубика, т.е. $K \rightarrow 1 + 0$. В этом случае работа по погружению кубика в воду очень велика. На большом озере, при $K \rightarrow +\infty$, эта работа оказывается наименьшей из всех возможных и равной работе силы тяжести жидкости, вытесненной кубиком. При этом считается, что уровень воды в озере не изменился.

Приобретенная потенциальная энергия возникла в результате работы переменной силы. То, что сила переменная, знаем из опыта: чтобы глубже погрузить плавающее на поверхности воды тело, надо приложить большую силу. Следовательно,

$$\int_0^x F_2(x) dx = \rho a^2 g \frac{K}{2(K-1)} x^2.$$

Дифференцируя, получаем

$$F_2(x) = \rho a^2 g \frac{K}{K-1} x.$$

Очевидно, что

$$F_2(x) = \rho a^2 g \frac{K}{K-1} x > F_1(x) = \rho a^2 g x.$$

Это неравенство означает, что во втором случае сила, необходимая для погружения кубика на глубину x от начального уровня, больше, чем в первом случае. Более того, эта требуемая сила может быть сколь угодно большой, если K достаточно близко к единице, т.е. если бак с водой достаточно узкий. Именно это обстоятельство используется при создании гидравлических машин, в частности гидравлических прессов. В этом случае получается такой парадоксальный результат. Пусть наш кубик – это «корабль», а бак с водой – это «море». Тогда на этом корабле можно разместить сколь угодно тяжелый груз и корабль не утонет. Для этого надо взять параметр K достаточно близким к

единице. Только вот плыть такому кораблю некуда – он буквально зажат со всех сторон «морскими берегами».

В заключение еще раз вспомним глубину погружения кубика в воду $H_2 = \frac{K}{K-1} x$ и заметим, что на этой глубине на кубик действует сила

$$F_2(x) = \rho a^2 g H = \rho a^2 H \cdot g.$$

А это и есть сила Архимеда, равная весу воды, вытесненной кубиком. Подумайте, к какой части воды относится в данном случае прилагательное *вытесненная* и куда она *вытеснена*. Главная характеристика вытесненной воды – это ее объем, он всегда равен объему той части тела, которая находится в воде.

БИБЛИО-ГЛОБУС
ВАШ ГЛАВНЫЙ КНИЖНЫЙ

МЫ ПРЕДЛАГАЕМ
БОЛЬШОЙ ВЫБОР ТОВАРОВ И УСЛУГ

УСЛУГИ	АССОРТИМЕНТ
■ Интернет-магазин www.bgshop.ru	■ Книги
■ Кафе	■ Аудиокниги
■ Клубные (дисконтные) карты и акции	■ Антиквариат и предметы коллекционирования
■ Подарочные карты	■ Фильмы, музыка, игры, софт
■ Предварительные заказы на книги	■ Канцелярские и офисные товары
■ Встречи с авторами	■ Цветы
■ Читательские клубы по интересам	■ Сувениры
■ Индивидуальное обслуживание	
■ Подарочная упаковка	
■ Доставка книг из-за рубежа	
■ Выставки-продажи	

г. Москва,
м. Лубянка,
м. Китай-город
ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1

8 (495) 781-19-00

www.biblio-globus.ru

пн – пт 9:00 - 22:00
сб – вс 10:00 - 21:00
без перерыва на обед