Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Ашкинази, Удар и его окрестности, *Квант*, 2021, номер 6, 5–9

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20210602>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 15:52:41

Удар и его окрестности

Л. АШКИНАЗИ

В любом школьном учебнике физики рассмотрен случай прямого центрального соударения двух шаров – абсолютно упругого и абсолютно неупругого. Соответствующие уравнения, по два для каждого случая, вы, конечно, можете написать и решить. В реальной жизни не бывает «прямого центрального» и не бывает «шаров» – какие-то отклонения есть всегда. Кстати, раз нет шаров, то как нам формулировать условие «прямизны» и «центральности» и будет ли нам с этой формулировки прок? Ну и, конечно, не бывает «абсолютно упругого» и, более того, не бывает «удара». Вводя это понятие, мы обычно пренебрегаем временем взаимодействия, а для изменения импульса за бесконечно малое время нужна (вспомните уравнение $m \cdot \Delta v = F \cdot \Delta t$) бесконечно большая сила, которая разрушит любой материал. Почему же все это есть в учебниках, и далеко не только в школьных?

Когда в физике рассматривают модели, выбор конкретного упрощения определяется формальной возможностью получения решения и разумностью этого решения. Причем «разумность» зависит от того, как мы собираемся применять решение. Если речь идет о практическом применении, т.е. об инженерии, о создании вещей, то главное – достаточно ли точно полученное решение в тех условиях и при тех ограничениях, для которых оно нам нужно. Если речь о практике пока не идет, т.е. если это «внутрифизическая» модель, то ситуация сложнее. Тут важно, насколько модель опирается на фундаментальную физику, есть ли в ней непонятные подгоночные параметры и сколько их, насколько модель логична, допускает ли она развитие. Это менее четкие критерии, поэтому в физике могут в течение какого-то

времени сосуществовать несколько моделей одного и того же круга явлений. Инженерия таких ситуаций старается избегать, хотя это не всегда удается. Например, в дисциплине, название которой вы, наверное, слышали – «сопротивление материалов», есть несколько способов оценки предельных нагрузок на элементы конструкций, которые так и называют – «теории прочности». Но это редкая ситуация.

Модель удара, изложенная в школьных учебниках, существует примерно три века (ее история рассказана, например, вот тут – <http://physiclib.ru/books/item/f00/s00/z0000053/st059.shtml>). Поэтому она не «внутрифизическая», а вполне применимая на практике. Кроме того, у нее есть полезные и интересные расширения, которым и посвящена данная статья. Причем расширениям как школьным, встречающимся в задачах и вопросах на экзаменах, так и внешкольным.

Но для начала, чтобы освежить эту модель в памяти и «закрепить на панели быстрого доступа», обозначим массы шаров m_1 и m_2 , их скорости, соответственно, $v_{1\text{ до}}$, $v_{2\text{ до}}$, $v_{1\text{ после}}$ и $v_{2\text{ после}}$ и для ситуации $v_{2\text{ до}} = 0$ построим красивые графики зависимости $v_{1\text{ после}}/v_{1\text{ до}}$ и $v_{2\text{ после}}/v_{1\text{ до}}$ от m_1/m_2 для обоих типов соударений (рис. 1). Кстати, подумайте, почему мы строили зависи-

Рис. 1. Поведение шаров после соударения. Кривая 1 относится к первому шару в случае упругого удара; кривая 2 — к обоим шарам при неупругом ударе; кривая 3 — ко второму шару в случае упругого удара

мости для, как принято говорить в физике, «обезразмеренных» величин.

Полюбовавшись на графики, пойдем дальше. Простейший вариант задачи по физике – когда нужно использовать ровно то, что написано в учебнике. Чаше составитель задачи должен, взяв за основу что-то простое из учебника, «навесить» на задачу что-то еще, причем тоже имеющееся в учебнике – чтобы эта задача стала пригодна для ЕГЭ или иного экзамена.

Рис. 2. Различные типы ударов: а) прямой центральный; б) прямой не центральный; в) косой; г) косой в частном случае

Например, в случае прямого центрального удара (рис.2,а) можно постулировать, что в момент соударения тела обмениваются какой-то массой –

вводится одна новая величина, добавляются уравнения, связывающие новые массы со старыми. Общее количество параметров увеличивается с 6 до 9, количество независимых уравнений становится не 2, а 4, стало быть, и неизвестных может быть теперь не 2, а 4.

Убедитесь сами, что все именно так.

Разумеется, вы понимаете, что законы физики определяют, каковы будут величины после взаимодействия (например, скорости после столкновения), но автор задачи мог объявить неизвестными любые из параметров. Более того, на экзаменах очень часто в соседних вариантах дается одна и та же по существу задача, но с разными наборами «неизвестных». И надо быть внимательным, чтобы не решить по неаккуратности задачу из другого варианта – это трактуется как списывание.

Другой вариант формального усложнения задачи – указать, что какая-то доля суммарной кинетической энергии переходит

в тепло и это надо учесть в решении, а также определить, насколько нагреются тела при известных удельных теплоемкостях. Либо можно задать нагрев и сделать неизвестной одну из удельных теплоемкостей (сообразите сами, почему одну). При этом должно быть указано, что нагрев тел одинаков, либо уточнено, как распределяется между ними тепло. Всерьез это посчитать трудно, но если предположить, что доли энергии деформации, преобразующиеся в тепло, одинаковы, то отношение тепловыделений будет пропорционально энергии деформации, формула для которой известна. Но даже если не заморачиваться распределением тепла, то составитель задач может придумать всякую экзотику даже на базе простейшего уравнения $Q = (c_1 m_1 + c_2 m_2) \Delta T$. Например, попросить определить материалы, благо на ЕГЭ есть список материалов с их параметрами, либо предложить определить диапазон возможных значений c_1 и c_2 .

Еще замечание в рамках прямого и центрального удара – почему-то обычно не оговаривается, что шарики не вращаются. Посмотрим, на что это могло бы повлиять. Если они вращаются так, что линейные скорости поверхности одинаковы, то все просто – даже при наличии трения ($\mu N \neq 0$) нет касательных сил. Если скорости не равны, жизнь становится сложнее. При коэффициенте трения, равном нулю, и отсутствии обмена массами угловая скорость сохраняется – опять же нет касательной силы и нет момента. При наличии обмена массами в игру вступает закон сохранения момента импульса и угловые скорости изменяются.

А вот если коэффициент трения нулю не равен, то получается явная некорректность. У нас же «удар», время взаимодействия равно нулю, но сила, с которой шарики давят друг на друга, бесконечна, значит, и сила трения бесконечна. А путь, пройденный поверхностью за нулевое время, равен нулю! Иными словами, и работа силы трения (сила на путь) и переданный ею импульс (сила на время) не определены (ноль на бесконечность). Мы уперлись в границу модели, для физики это ситуа-

ция нормальная – у любой модели есть границы, их полезно знать. В идеальном учебнике они должны быть указаны, или – если мы их не знаем – должно быть указано, какова область действия модели, т.е. до каких значений параметров она работоспособна и с какой точностью проверена. В данном случае у нас есть, однако, лазейка – если в условии сказано, что соударение абсолютно упругое, то работа силы трения равна нулю. Но для импульса такой лазейки нет, и некорректность остается.

Правда, иногда «удар» определяют иначе и аккуратнее – как взаимодействие достаточно короткое, чтобы можно было пренебречь внешними силами. В этом случае время соударения не равно нулю, силы не равны бесконечности и то, во что мы уперлись в предыдущем абзаце, мы обошли. Но все равно при абсолютной упругости соударения нет работы силы трения, а значит – или нет этой силы или нет перемещения. Однако импульсом шарики обмениваться могут, а следовательно, могут и изменять свои угловые скорости, и разлетаться вбок. Отсюда мораль – внимательно читать определения, ибо это тоже часть модели, а разные определения означают, что у нас разные модели. К поведению вращающегося шарика с трением мы еще вернемся.

Следующий шаг в глубину задачи – прямой не центральный удар (рис.2,б), шарики радостно летят по параллельным прямым и прикидывают, столкнутся ли они. Тут в игру вступают три параметра – два радиуса и расстояние между прямыми. Если оно равно нулю, имеем предыдущую задачу – центральный удар. Если расстояние больше суммы радиусов, то соударения вообще нет. Если столкновение происходит, то эти три параметра – точнее, отношение между ними – определяют положение точки столкновения и направления действующих на шарики при столкновении сил. Если соударение абсолютно неупругое, то все это не имеет значения – у нас опять два уравнения и две неизвестные величины, например скорости после соударения.

Если соударение упругое, полностью или частично, то новые параметры – точка столкновения и направления сил – делаются важными. Если трения нет, то силы – это только силы реакции, они перпендикулярны поверхности и проходят через центры шаров. Их компоненты, направленные вдоль параллельных прямых, влияют на продольные скорости, а поперечные компоненты вызывают разлет шариков поперек прямых. Задача вполне решаемая, но в таком виде ее в школе не дают, а поступают проще – убивают одно неизвестное. Действительно, у нас теперь три уравнения (для энергии, импульса вдоль и поперек), а неизвестных величин четыре. В естественной ситуации это компоненты скоростей после соударения, и найти их, не зная наших новых параметров, нельзя. Но то в природе, а в школе поступают просто, делают неизвестными три любые величины – по числу уравнений. Например, полагают «известной» минимум одну из компонент одной из скоростей после соударения. Либо поступают немного приличнее – просят найти не сами компоненты, а отношение каких-то двух, опять же искусственно уменьшая количество неизвестных.

Если ввести коэффициент трения, то столкновение перестает быть абсолютно упругим, и у нас возникает выбор. Можно это игнорировать, применять закон сохранения кинетической энергии, а силу трения считать пропорциональной реакции опоры. В этом случае учет трения сведется к тому, что сила, с которой один шарик действует на другой, станет не перпендикулярна поверхности – у нее возникнет касательная компонента. И все было бы хорошо, но сила трения пропорциональна реакции опоры только при наличии движения. В начале столкновения шарики друг по другу действительно скользят, но не могут ли они в процессе взаимодействия остановиться? Если же мы отказываемся от абсолютной упругости, мы либо теряем одно уравнение, либо нам надо честно посчитать работу силы трения и вычесть результат из кинетической энергии. Это будет не простая задача, особенно с учетом

того, что в какой-то момент скольжение может и прекратиться. К этой проблеме мы еще вернемся.

Еще один шаг в глубину – косое соударение (рис.2,в), когда начально шарики летят по не параллельным прямым. В таком случае для выяснения, столкнутся ли шарики и если да, то в какой точке, надо разбираться с хитрой геометрией этой задачи – возникают два новых параметра, начальные расстояния от пересечения прямых (и этот ужас на плоскости, а в объеме будет ужас-ужас-ужас). Подумайте, как это можно было бы сделать. Дальше ситуация такова. Если столкновение абсолютно неупругое, то надо вводить оси координат, искать проекции импульсов исходных тел на эти оси и определять движение суммарного тела из закона сохранения импульса. В школе, для упрощения жизни несчастного школьника, прямые делают перпендикулярными (рис.2,з), факт столкновения вводят в условие, и решение делается очевидным. Если же столкновение абсолютно упругое, то повторяется все, изложенное выше, и, естественно задачу можно сделать вполне решаемой, расположив прямые, например, под прямым углом и сразу указав точку касания. Подумайте, как бы вы выбрали диаметры шариков и точку касания, если бы вам предложили адаптировать эту задачу для себя, любимого. Кстати, вот новый тип задач по физике – задача дается с частично свободным условием и предлагается сделать из нее две – одну возможно проще, а другую возможно сложнее. Второе, кстати, может быть сложнее, чем первое!

Деление ударов на абсолютно упругие и абсолютно неупругие имеет два связанных недостатка. Первый – у нас нет характеристики для промежуточных случаев, вдобавок один из крайних тоже является идеализацией. Второй недостаток – эти два крайних случая характеризуются разными параметрами: один чем-то, связанным с энергиями, другой – со скоростями. Это похоже на такой способ оценивания контрольных по физике: «абсолютно плохая» работа – это такая, где не решена ни одна задача, а «абсолютно хорошая» – написан-

ная идеальным почерком. И все, никаких других оценок и критериев. Как вам такая идея? Естественный выход – характеризовать все виды удара долей потерь кинетической энергии. Но выход этот плох, потому что при абсолютно неупругом ударе потери кинетической энергии могут быть и очень малыми, например, при близости начальных скоростей. Кстати, это ведь означает, что удар может быть и абсолютно неупругим и сколь угодно близким к абсолютно упругому!

В технике для характеристики удара вводится параметр «коэффициент восстановления», причем существуют два (правда, близких) способа его определения. Первый способ используется, когда тело сталкивается с заведомо неподвижной преградой – т.е. она изначально покоится и ее масса много больше массы летящего тела. Тогда этот коэффициент определяют как $k = v_{1 \text{ после}} / v_{1 \text{ до}}$. Вторым способом не используют этого предположения, тогда

$$k = \left| (v_{1 \text{ после}} - v_{2 \text{ после}}) / (v_{1 \text{ до}} - v_{2 \text{ до}}) \right|$$
. Вторым способом предложил не кто-нибудь, а сам Ньютон. Первый способ является просто частным случаем второго, а формулируют его отдельно просто потому, что его удобно применять для характеристики упругих свойств материалов, если из них можно сделать и маленький шарик, и большую плиту. Теперь посмотрите на рисунок 1 для случая абсолютно упругого удара и убедитесь, что определение Ньютона работает во всем диапазоне отношений масс.

Вам, будем надеяться, уже хочется заглянуть «внутрь» процесса соударения и узнать, какова его длительность. Кроме того, мы обещали сказать что-то о процессе соударения с трением, когда возникает вращение. Эти вопросы вполне доступно для школьников и весьма подробно разобраны в книге Е.И.Бутикова, А.А.Быкова и А.С.Кондратьева «Физика в примерах и задачах», и она, к счастью, есть в интернете. Мы же обратимся к иной задаче, тоже связанной с «внутренностями» процесса удара, но менее известной.

Ядро этой задачи таково. Имеется шар известного размера, который изначально покоится. По прямой, проходящей через его центр, летит тело много меньшей массы, которое сталкивается с этим шаром. Сила, действующая между телами, считается известной. Каковы дальнейшие события? Условие на массы означает, что большой шар покоится, точнее – движется много медленнее малого тела. Далее, если сила равна нулю (очень часто именно так проще всего начинать рассмотрение), то взаимодействие отсутствует – большое покоится, малое летит, удивляясь, что его скорость не изменилась. Начинаем увеличивать силу – начинается обмен импульсами, причем мы можем пользоваться и законом сохранения энергии, вычитая из кинетической энергии работу действующей между телами силы $A = FD$, где D – диаметр. При дальнейшем увеличении силы мы приходим к «абсолютно неупругому удару», когда малое тело останавливается внутри большого. Вы сами можете написать соответствующие уравнения и получить решение.

Если отказаться от условия на соотношение масс, то придется учитывать, что большое тело тоже перемещается, и тогда движение малого тела происходит не до остановки, а до совпадения скоростей. Можно рассмотреть и ситуацию, когда большое тело имеет начальную скорость, это не сильно усложнит задачу.

У этой модели существуют несколько симпатичных вариантов усложнения, некоторые из них встречаются в задачниках. Например, малое тело может лететь по прямой, не проходящей через центр большого тела. В этом случае у силы F возникает момент, и большое тело начинает, очевидно, вращаться. Менее очевидно, что при этом у большого тела возникает компонента скорости, направленная поперек исходного направления движения малого тела. Другой вариант усложнения – если начальная скорость большого тела направлена не вдоль прямой, по которой изначально летит малое тела, а, например, перпендикулярно. Рассмотрите эту ситуацию и убедитесь, что вращение возникает

и в этом случае. А вот если малое тело попадает в большое, летя по прямой, проходящей через центр не имеющего линейной скорости, но изначально вращающегося большого тела, то его вращение замедлится. «Все страньше и страньше», – сказала бы Алиса. (Помните такую?)

Если изложенное выше показалось вам интересным, почти наверняка вам будут интересны и статьи об ударе, ранее опубликованные в журнале «Квант» – А.Панова (1990, №8), В.Козлова (1988, №9 и 1995, №4), С.Хорозова (1997, №4) и А.Гроссберга и М.Каганова (1993, №9/10 и 1996, №2). Причем полезно прочесть их все, потому что авторы подходят к явлению с разных сторон и строят разные его модели – иногда более математические, иногда более физические. А из последней статьи вы еще и узнаете, почему при столкновении слышен звук и какую долю энергии он уносит.

В заключение... оторвемся от книги или монитора и посмотрим наверх. Как написал Станислав Лем, космос не пуст – «его непрерывно пронизывают взгляды миллионов живых существ». Может быть, сейчас ваш взгляд пересекается с чьим-то взглядом с другого конца Галактики. В космосе тоже есть столкновения, известен один случай столкновения спутников, и вообще для космических аппаратов существует опасность столкновения со всяким мусором, летающим над нами. Правда, при этих скоростях рассмотренные нами модели не работают, механизм взаимодействия выглядит иначе и всегда происходит разрушение. Если человечество будет продолжать осваивать космос, то важность соответствующих задач будет расти, так что, если вы получите серьезное образование и займетесь этим классом задач, скучать вам не придется.

Кстати, в статье мы не раз упоминали вращение. А галактики, как вы знаете, вращаются. Не связано ли это со столкновениями чего-то, из чего образовались галактики?