Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Дидин, П. Кожевников, Педальные отрезки: где максимум?, *Квант*, 2021, номер 6, 18–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20210603>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 09:28:59

Педальные отрезки: где максимум?

М.ДИДИН, П.КОЖЕВНИКОВ

Пусть на плоскости дан треугольник ABC и точка X . Проекции точки X на стороны BC , CA , AB обозначим соответственно X_a , X_b , X_c . Как известно, точки X_a , X_b , X_c будут лежать на одной прямой тогда и только тогда, когда X лежит на описанной окружности треугольника ABC (в таком случае прямая $X_aX_bX_c$ называется *прямой Симсона*). Далее считаем, что X не лежит на окружности (ABC) , тогда проведем через точки X_a , X_b , X_c окружность – так называемую *педальную* окружность точки X (рис. 1). Вторые точки пересечения окружности $X_aX_bX_c$ со сторонами треугольника обозначим Y_a , Y_b , Y_c . *Педальными отрезками* точки X назовем отрезки X_aY_a , X_bY_b , X_cY_c .

В этой небольшой статье мы изучим, какой из педальных отрезков будет макси-

мальным или минимальным по длине, в зависимости от положения точки X . По результатам этого небольшого исследования мы рассмотрим некоторые интересные частные случаи и дадим решение задачи М2621 из «Задачника «Кванта» (см. «Квант» №9 за 2020 г.). Авторское решение этой задачи опиралось на вычисление длин педальных отрезков.

Будем использовать следующий известный факт (см., например, статью П.Кожевникова «Изогонально сопряженные точки» в «Кванте» №1 за 2016 г.): перпендикуляры к прямым BC , CA , AB , проведенные в точках Y_a , Y_b , Y_c соответственно, всегда пересекутся в одной точке Y , *изогонально сопряженной* точке X , т.е. в точке Y такой, что прямые AX и AU симметричны относительно биссектрисы угла BAC , прямые BX и BY симметричны относительно биссектрисы угла ABC , прямые CX и CY симметричны относительно биссектрисы угла ACB . Иначе говоря, точки X и Y в наших рассуждениях равноправны, они имеют общую педальную окружность. Точке Y мы также запретим лежать на окружности (ABC) (в этом случае X не определена, или, как говорят, «ушла в бесконечность»), кроме случая, когда X лежит на одной из прямых AB , BC , CA – тогда педальная окружность точки X определена и проходит через вершину треугольника ABC , а Y совпадает с этой вершиной.

Основная идея будет в следующем. Мы найдем геометрическое место точек X , для которых найдутся два равных педальных отрезка, это ГМТ окажется объединением нескольких прямых и окружностей, которые разобьют плоскость на *области*. Далее позволим точке X непрерывно двигаться по плоскости, не пересекая «критической окружности» (ABC) ; при этом длины педальных отрезков будут меняться непрерывно, а значит, пока X находится внутри одной из определенных выше областей, упорядоченность по длине педальных отрезков X_aY_a , X_bY_b , X_cY_c сохранится.

Далее проведем внутренние и внешние биссектрисы треугольника; пусть точки их

Рис. 1

пересечения — I, I_a, I_b, I_c — центры вписанной и внеписанных окружностей. Отметим, что I, I_a, I_b, I_c — это в точности точки, совпадающие со своими изогонально сопряженными; можно сказать, что для этих точек длины всех педальных отрезков равны 0.

Будем рассматривать точки X , отличные от I, I_a, I_b, I_c , с условием $X_bY_b = X_cY_c$. Проекция X_bY_b и X_cY_c отрезка XY на прямые AC и AB равны по длине тогда и только тогда, когда XY составляет равные углы с прямыми AC и AB , т.е. когда отрезок XY параллелен либо внутренней, либо внешней биссектрисе угла BAC .

При этом если $XY \parallel I_bI_c$, то (острый) угол между прямыми XY и BC меньше, чем угол между прямыми XY и AC (или AB), поэтому длина проекции отрезка XY на прямую BC больше длины проекции на прямую AB или AC , т.е. $X_aY_a > X_bY_b = X_cY_c$.

Если же $XY \parallel I_aI_c$, то (острый) угол между прямыми XY и BC больше, чем угол между прямыми XY и AC (или AB), значит, в этом случае $X_aY_a < X_bY_b = X_cY_c$.

Лемма. Пусть дан прямоугольный треугольник PQR , $\angle R = 90^\circ$, и различные точки X и Y , симметричные относительно прямой PQ . Прямые RX и RY симметричны относительно прямой RP тогда и только тогда, когда X и Y лежат на окружности (PQR).

Доказательство. Если X и Y лежат на окружности (PQR) (т.е. окружности, построенной на PQ как на диаметре; рис.2), то дуги PX и PY равны, поэтому RP — биссектриса (внутренняя либо внешняя) угла XRY .

Пусть, наоборот, RP — биссектриса угла между прямыми RX и RY . Тогда RP пересекает серединный перпендикуляр QP к отрезку XY в серединах двух дуг XY окружности (RXY). Но эти точки пересечения — P и Q , поэтому все пять точек R, P, Q, X, Y лежат на одной окружности. Лемма доказана.

Рис. 2

Рассмотрим условие $XY \parallel I_aI_c$. Это условие, очевидно, выполнено, когда X лежит на самой биссектрисе I_aI_c угла A . Пусть далее X не лежит на прямой I_aI_c . Тогда прямые AX и AY не совпадают и симметричны относительно биссектрисы (внешней и внутренней) угла A , а поскольку $XY \parallel I_aI_c$, точки X и Y должны быть симметричны относительно внешней биссектрисы I_bI_c угла A . Но тогда для точек X, Y и прямоугольных треугольников I_bI_cB, I_bI_cC выполнены условия леммы, а значит, X и Y лежат на окружности (I_bI_cBC) (с диаметром I_bI_c). Наоборот, если X и Y лежат на этой окружности (и симметричны относительно I_bI_c), то X и Y изогонально сопряжены. Итак, мы получили такое утверждение.

Утверждение 1. Условие $X_aY_a < X_bY_b = X_cY_c$ выполнено тогда и только тогда, когда X лежит на прямой I_aI_c или на окружности (I_bI_cBC).

Диаграмма максимумов

Будем следить за максимальным из трех педальных отрезков. Проведем все три биссектрисы и окружности (I_bI_cBC), (I_cI_aCA), (I_aI_bAB) (рис.3). Проведенные прямые и окружности разбивают плоскость на области. Оказывается (и сейчас мы это покажем), что максимум из трех педальных отрезков определяется цветом области, в которой лежит точка X : если X лежит в голубой области, то максималь-

Рис. 3

ным является pedalный отрезок X_aY_a , если в зеленой – то X_bY_b , а если в розовой – то X_cY_c .

Пусть для точек X из некоторой области максимальным pedalным отрезком является X_bY_b . Будем непрерывно двигать точку X , не пересекая «критической» окружности (ABC) . Пусть X перешла из одной области в соседнюю (граничащую по отрезку или дуге) область; такой переход будем называть «катастрофой». Из утверждения 1 следует, что после катастрофы максимальным мог стать отрезок X_cY_c только в случае перехода точки X через прямую II_a либо через окружность (I_bI_cBC) . После такого перехода проекция вектора $\overrightarrow{XY}$ на внешнюю биссектрису меняет направление (покажите это!), поэтому действительно максимальный отрезок меняется с X_bY_b на X_cY_c .

Несложно определить цвет некоторых областей. Например, если X находится вблизи отрезка AI внутри треугольника, образованного прямыми AB, AI, CI , то Y находится вблизи прямой AI внутри треугольника, образованного прямыми BC, AI, CI ; в таком случае направление $\overrightarrow{XY}$ близко к направлению $\overrightarrow{AI}$, но (острый) угол между $\overrightarrow{XY}$ и $\overrightarrow{AB}$ больше, чем (острый) угол между $\overrightarrow{XY}$ и $\overrightarrow{AC}$, поэтому для таких точек X (и Y) верно $X_aY_a < X_cY_c < X_bY_b$ и соответствующие области на рисунке 3 (криволинейные треугольники, образованные прямыми AI, CI и одной из дуг окружности (I_aI_bAB) или (I_bI_cBC)) должны быть зелеными. Далее цвет каждой из областей, лежащих внутри окружности (ABC) , можно определить, отслеживая катастрофы при переходе из одной области в соседнюю.

Пусть теперь X находится вне окружности (ABC) , скажем, X лежит в области, расположенной непосредственно над дугой AI_b . Тогда нетрудно видеть, что Y лежит внутри окружности (ABC) в области, про которую уже известно, что она зеленая. Значит, область, которой принадлежит X , тоже зеленая. Определить цвет других областей, лежащих вне окружности (ABC) , можно опять, отслеживая ката-

строфы. Таким образом получается раскраска на рисунке 3; по факту оказывается, что переход через критическую окружность (ABC) не меняет цвет области.

Диаграмма минимумов

Рассуждения, аналогичные проведенным выше, можно провести и для минимального pedalного отрезка. Аналогом утверждения 1 будет следующее.

Утверждение 2. Условие $X_aY_a > X_bY_b = X_cY_c$ выполнено тогда и только тогда, когда X лежит на прямой I_bI_c или на окружности (II_aBC) .

За минимум отвечает принадлежность точки X какой-то области, на которые плоскость разбивают внешние биссектрисы и окружности (II_aBC) , (II_bCA) , (II_cAB) (рис. 4). Читатель может провести

Рис. 4

рассуждения в подробностях и убедиться, что в качестве диаграммы минимумов получается раскраска на рисунке 4.

Решение задачи M2621

M2621 (И. Вайнштейн). Дан треугольник ABC , в котором $AB < BC < CA$. Внеписанные окружности касаются сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Через точки A_1, B_1 и C_1 проведена окружность, которая вторично пересекает стороны BC, CA, AB в точках A_2, B_2 и C_2 соответственно. На какой из сторон треугольника может лежать наибольший из отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 ?

Для решения этой задачи заметим, что перпендикуляры, проведенные к сторонам треугольника через точки касания с вневписанными окружностями, проходят через центры вневписанных окружностей, т.е. это перпендикуляры, проведенные через I_a, I_b, I_c к прямым BC, CA, AB соответственно. Иными словами, это перпендикуляры, опущенные из вершин треугольника $I_a I_b I_c$ на стороны его ортотреугольника. Как известно, они пересекаются в центре O' окружности $(I_a I_b I_c)$. Таким образом, окружность из условия задачи – это pedalная окружность точки $X = O'$.

Обратимся теперь к диаграмме максимумов (см. рис.3) и воспользуемся условием $AB < BC < CA$. Из $AB < CA$ легко следует $\angle I_a BC < \angle I_a CB$, $\angle B I_a I < \angle C I_a I$, откуда получаем, что высота треугольника $I_a BC$, проведенная из I_a , находится внутри угла $\Pi_a C$. Аналогично, из $AB < BC$ следует, что высота треугольника $I_c AC$, проведенная из I_c , находится внутри угла $\Pi_b C$; а из $BC < CA$ следует, что высота треугольника $I_b BC$, проведенная из I_b , находится внутри угла $\Pi_c A$. Значит, точка O' лежит внутри углов $\Pi_a I_b, \Pi_b I_a$ и $\Pi_c I_b$, т.е. находится внутри треугольника $\Pi_b C$. Видим, что этот треугольник состоит из синей и красной областей, границей между которыми является дуга окружности $(I_a I_c AC)$. Если точка O' находится внутри этой окружности, т.е. в синей области, то $\angle I_a O' I_c > 90^\circ$, откуда $\angle I_a I_b I_c > 45^\circ$, что соответствует условию $\angle ABC < 90^\circ$, значит, при $\angle ABC < 90^\circ$ максимальный pedalный отрезок – это $X_b Y_b$. При $\angle ABC > 90^\circ$ точка O' лежит в красной области, значит, максимальный pedalный отрезок – $X_c Y_c$. При $\angle ABC = 90^\circ$ имеем $X_b Y_b = X_c Y_c > X_a Y_a$.

Мы получили полный ответ, и вроде бы задача M2621 решена. Однако в формулировке задачи есть тонкость: обратим внимание, что в условии сказано, что данная pedalная окружность пересекает стороны (а не их продолжения). Во всех наших рассуждениях выше расположение проекций X_a, Y_a и т.д. никак не использовалось.

Оказывается, при $\angle ABC \geq 90^\circ$ наша pedalная окружность точки O' содержит вершину B внутри себя, значит, в этом случае pedalные отрезки, лежащие на прямых AB и BC , не могут лежать на отрезках AB и BC . Докажем это.

Точка касания $X_a = A_1$ такова, что

$$CX_a = \frac{AB + BC - AC}{2} < \frac{AB}{2},$$

поэтому A_1 лежит на отрезке CA_0 , где A_0 – середина BC (рис.5). Аналогично, точка

Рис. 5

C_1 отрезка AB лежит на отрезке AC_0 , где C_0 – середина AB . В силу условия $\angle ABC \geq 90^\circ$, точка O пересечения серединных перпендикуляров к AB и BC лежит по другую сторону от B относительно прямой AC , а значит, точка O' – тоже, при этом O лежит внутри треугольника $AO'C$. Заметим, что четырехугольник $O'B_1 A_1 C$ – вписанный (в окружность с диаметром $O'C$), откуда $\angle A_1 B_1 C = \angle A_1 O' C = 90^\circ - \angle A_1 C O' < 90^\circ - \angle A_1 C O = \angle A_1 O C = \angle BAC$. Аналогично, $\angle C_1 B_1 A < \angle BCA$.

Получаем, что $\angle A_1 B_1 C_1 = 180^\circ - (\angle A_1 B_1 C + \angle C_1 B_1 A) > 180^\circ - (\angle BAC + \angle BCA) = \angle ABC$. Тогда $\angle A_1 B_1 C_1 + \angle A_1 B_1 C > 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Значит, B лежит вне окружности $(A_1 B_1 C_1)$, что мы и хотели доказать.

Еще несколько фактов

В завершение приведем еще несколько задач, в которых сформулированы интересные факты для остроугольного треугольника ABC на ту же тему. Докажите их.

1. Как известно, окружность девяти точек является pedalной для ортоцентра H

или центра описанной окружности O . Если средний угол треугольника меньше 60° , то наименьший из pedalных отрезков для $X = H$ лежит на наименьшей стороне, если же средний угол треугольника больше 60° , то – на наибольшей стороне.

2. Пусть r – радиус вписанной окружности, r_b – радиус внеписанной окружности, касающейся средней стороны, R – радиус описанной окружности. Тогда наименьший из pedalных отрезков задачи M2621 (хорд окружности Нагеля) лежит на меньшей стороне если и только если $2R < r + r_b$.

3. Наибольшая из хорд pedalной окружности точки Торричелли лежит на средней стороне треугольника.

4. Наименьшая из хорд pedalной окружности точки Торричелли лежит на меньшей стороне, если средний угол треугольника больше 60° , и на большей стороне – в противном случае.

Можно продолжить исследование для других замечательных точек треугольника, а также для случая тупоугольного треугольника.

Скрытая симметрия

Е. БАКАЕВ

В этом номере приводится решение задачи M2644. Красота этой задачи в том, что, несмотря на совершенно разные правила хода для двух игроков, оказывается, можно взглянуть на ситуацию под таким углом, что в качестве стратегии работает симметрия непосредственно в геометрическом смысле!

Мы приведем еще три игры с похожей «изюминкой». В задачах 1 и 2 игроки ходят по одинаковым правилам, но все же положение фигур на доске симметрией не обладает – предлагаем подумать, как этой симметрии достичь. В задаче 3 и вовсе игроки ходят совершенно по-разному, даже никакого расположения предметов не задается, но и там, тем не менее, разглядев скрытую симметрию, вы решите задачу.

1 (А.Толпыго). Белая ладья стоит на поле b2 шахматной доски 8×8 , а черная – на поле c4. Игроки ходят по очереди, каждый своей ладьей, начинают белые. Запрещается ставить свою ладью под бой другой ладьи, а также на поле, где уже побывала какая-нибудь ладья. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Кто из

игроков может обеспечить себе победу, как бы ни играл другой? (За ход ладьи сдвигается по горизонтали или вертикали на любое число клеток, и считается, что она побывала только в начальной и конечной клетках этого хода.)

2 (А. Бучин, А. Иванищук). Двое игроков по очереди выставляют на доску 65×65 по одной шашке. При этом ни в одной линии (горизонтали или вертикали) не должно быть больше двух шашек. Кто не может сделать ход – проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?

3 (Е.Бакаев). Петя и Вася играют в такую игру. Сначала на столе лежит 11 кучек по 10 камней. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Каждым ходом игрок берет 1, 2 или 3 камня, но Петя каждый раз выбирает все камни из любой одной кучи, а Вася всегда выбирает все камни из разных кучек (если их больше одного). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?