Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Шарыгин, Задача о шаре в треугольной призме, *Квант*, 2021, номер 6, 27–31

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20210605>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 15:51:34

Задача о шаре в треугольной призме

Г.ШАРЫГИН

Эта статья родилась из обсуждения со школьниками 2007 московской школы следующей олимпиадной задачи (автор задачи – И. Богданов).

Задача 1. В треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ вписан шар, касающийся боковых граней BCC_1B_1 , CAA_1C_1 и ABB_1A_1 в точках A_0 , B_0 , C_0 соответственно. При этом $\angle A_0BB_1 = \angle B_0CC_1 = \angle C_0AA_1$ (рис. 1).

а) Чему могут равняться эти углы?

б) Докажите, что отрезки AA_0 , BB_0 , CC_0 пересекаются в одной точке.

в) Докажите, что проекции центра сферы на прямые A_1B_1 , B_1C_1 , C_1A_1 образуют правильный треугольник.

Рис. 1

Задачу эту несложно решить геометрически; хотя она и не является главным содержанием статьи, мы приведем для полноты картины ее решение.

Решение. а) Напомним, что длины касательных, проведенных к сфере из одной точки, равны, поэтому $AB_0 = AC_0$, $BA_0 = BC_0$, $CA_0 = CB_0$. Кроме того, по этой же причине (и по теореме о трех перпендикулярах) получаем, что равны перпендикуляры, опущенные из A_0 , B_0 , C_0 на соответствующие боковые ребра призмы. Поэтому

$$\angle C_0AA_1 = \angle B_0AA_1, \quad \angle A_0BB_1 = \angle C_0BB_1,$$

$$\angle B_0CC_1 = \angle A_0CC_1.$$

В силу условия, все эти шесть углов оказываются равными; пусть φ – их величина. Так как сумма углов при стороне AB параллелограмма AA_1B_1B равна 180° , как и сумма углов треугольника C_0AB , мы видим, что

$$\angle AC_0B = \angle C_0AA_1 + \angle C_0BB_1 = 2\varphi.$$

И, аналогично, $\angle BA_0C = \angle CA_0B = 2\varphi$. Пусть T – точка касания вписанного шара с основанием ABC данной призмы. Тогда по той же причине попарно равны треугольники A_0BC и TBC , B_0AC и TAC , C_0AB и TAB . Поэтому сумма углов $\angle AC_0B + \angle BA_0C + \angle CA_0B = 6\varphi$ равна сумме углов $\angle ATB + \angle BTC + \angle CTA = 360^\circ$, откуда, $\varphi = 60^\circ$. Отметим, что точка T оказывается при этом точкой Торричелли, т.е. углы ATB , BTC , CTA равны по 120° .

б) Докажем, что отрезки AA_0 и BB_0 пересекаются в одной точке. В самом деле, если продлить отрезки AB_0 и BA_0 до пересечения с CC_1 , то в силу доказанного получим, что треугольники, образуемые прямой CC_1 , проведенными прямыми и отрезками CA_0 , CB_0 , правильные. Так как $CA_0 = CB_0$, мы видим, что эти треугольники равны, и, следовательно, прямые AB_0 , BA_0 и CC_1 пересекаются в одной точке. Значит, точки A , A_0 , B и B_0 лежат в одной плоскости, поэтому отрезки AA_0 и BB_0 пересекаются. Аналогично докажем, что отрезки AA_0 и CC_0 тоже пересекаются, как и отрезки BB_0 и CC_0 . Поскольку точки A , A_0 , B , B_0 , C и C_0 не лежат в одной плоскости, мы заключаем, что отрезки AA_0 , BB_0 и CC_0 пересекаются в одной точке.

в) Заметим, что по тем же причинам, что и раньше, треугольники AA_1B_0 и AA_1C_0 равны. Так как к тому же AA_1C_1C и AA_1B_1B – параллелограммы, получаем равенство

$$\angle B_0AC + \angle B_0A_1C_1 = \angle B_0A_1 =$$

$$= \angle AC_0A_1 = \angle C_0AB + \angle C_0A_1B_1.$$

С другой стороны, сумма углов $\angle B_0AC + \angle C_0AB$ равна углу $\angle BAC$ основания призмы, а сумма углов $\angle B_0A_1C_1 + \angle C_0A_1B_1$ равна $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$. Поэтому

$$\angle B_0AC = \angle C_0A_1B_1, \quad \angle C_0AB = \angle B_0A_1C_1.$$

Если S – точка касания вписанного шара с «верхним» основанием призмы, то в силу равенства треугольников SA_1C_1 и $B_0A_1C_1$, и аналогично для нижнего основания, получаем:

$$\angle SA_1C_1 = \angle B_0A_1C_1 = \angle C_0AB = \angle TAB.$$

По сходным причинам $\angle SA_1B_1 = \angle TAC$. Точно так же, $\angle SB_1C_1 = \angle TBA$, $\angle SB_1A_1 = \angle TBC$, $\angle SC_1A_1 = \angle TCB$, $\angle SC_1B_1 = \angle TCA$.

Рассмотрим верхнее основание призмы; для удобства мы нарисовали на нем образ T_1 точки T , получающийся при отождествлении верхнего и нижнего оснований. Пусть P, Q, R – основания перпендикуляров, опущенных из S на стороны треугольника $A_1B_1C_1$ (рис.2). Тогда, согласно известному призна-

Рис. 2

ку, четырехугольники A_1PSR , B_1PSQ , C_1RSQ можно вписать в окружности, а следовательно, $\angle SPR = \angle SA_1R$, $\angle SPQ = \angle SB_1Q$. Значит, по доказанному,

$$\begin{aligned}\angle RPQ &= \angle SPR + \angle SPQ = \angle SA_1R + \angle SB_1Q = \\ &= \angle T_1A_1B_1 + \angle T_1B_1A_1 = 60^\circ,\end{aligned}$$

так как $\angle A_1T_1B_1 = \angle ATB = 120^\circ$. Очевидно, точно такие же рассуждения применимы к остальным углам треугольника PQR , значит, он правильный. Осталось заметить, что по теореме о трех перпендикулярах точки P, Q, R являются проекциями центра сферы на прямые A_1B_1 , B_1C_1 и C_1A_1 соответственно.

На этом заканчивается решение задачи; мы привели его полностью, потому что по ходу этого рассуждения нам удалось доказать несколько замечательных фактов, которые мы будем сейчас исследовать.

Напомним, что две точки P и P' внутри¹ треугольника ABC называются *изогонально сопряженными* друг другу, если

$$\angle PAB = \angle P'AC, \angle PBC = \angle P'BA,$$

¹ На самом деле это требование не является обязательным; однако нам для наших целей достаточно рассматривать только такие точки.

$$\angle PCA = \angle P'CB.$$

Из этого определения, конечно, не следует, что изогонально сопряженная точка существует для любой точки внутри ABC . Этот факт обычно доказывают при помощи так называемой теоремы Чебы «в синусах» (хотя есть много других доказательств; см. например, статью П.Кожевникова «Иzegoнально сопряженные точки» в «Кванте» №1 за 2016 г.).

Но, кажется, мы близки к доказательству существования изогонально сопряженной точки, не используя тригонометрии, а при помощи... стереометрии! В самом деле, из приведенного решения задачи 1 следует такое общее утверждение.

Утверждение 1. *Если сфера, вписанная в треугольную призму, касается нижнего основания в некоторой точке P , то верхнего основания она будет касаться в изогонально сопряженной с ней точке.*

Действительно, при решении части в) задачи 1 мы только в самом конце воспользовались тем, что касание треугольника ABC происходит в специальной точке (точке Торричелли). Общее утверждение 1 про изогональное сопряжение точек касания верхнего и нижнего оснований призмы от этого факта совсем не зависит!

Кстати, для точки Торричелли изогонально сопряженной является так называемая точка Аполлония, которую можно определить как точку, проекции которой на прямые, содержащие стороны треугольника, являются вершинами правильного треугольника. Конечно, это согласуется с частью в) задачи 1.

Приведем также интересную переформулировку утверждения 1.

Утверждение 1'. *Пусть дана (бесконечная) треугольная призма и плоскость, пересекающая призму по треугольнику ABC . В призму вписаны две (равные) сферы, касающиеся плоскости ABC в точках P и P' . Тогда P и P' – изогонально сопряженные точки треугольника ABC .²*

² В качестве упражнения читатель может показать эквивалентность утверждений 1 и 1'. Утверждение 1' можно доказать независимо разными способами. Одна из идей – вписать в призму круговой цилиндр (он будет описанным вокруг сфер) и свести вопрос к известной конфигурации сфер Данделена и эллипса – сечения цилиндра, касающегося обеих сфер.

Чего же нам не хватает, чтобы завершить доказательство существования изогонально сопряженной точки (для любой точки внутри треугольника ABC) стереометрически? Самую малость: мы пока не знаем, существует ли призма, в которую можно вписать шар так, чтобы он касался нижнего основания в любой наперед данной точке треугольника. Итак, вот новая задача.

Задача 2. *Докажите, что для любой точки P внутри данного треугольника ABC найдется призма с основанием ABC , в которую можно вписать шар так, что при этом P будет точкой его касания с треугольником ABC .*

Как ни странно, но доказать существование такой призмы несложно, если воспользоваться так называемым «принципом промежуточного значения»: если некоторая функция f непрерывна, при $x = a$ ее значение отрицательно, а при $x = b$ — положительно, то в какой-то точке c между a и b окажется, что $f(c) = 0$. Это утверждение весьма универсально и применяется во многих задачах. Посмотрим, как оно сработает здесь.

Решение. Рассмотрим всевозможные сферы, касающиеся плоскости треугольника ABC в точке P и лежащие по одну сторону от этой плоскости. Для каждой такой сферы мы можем построить плоскости, касающиеся ее и проходящие через прямые AB , BC и CA . Очевидно, что при маленьких значениях радиуса сферы точка пересечения этих плоскостей будет лежать по ту же сторону от плоскости треугольника, что и сфера. Однако, когда радиус станет достаточно большим, точка пересечения окажется с другой стороны. Значит, согласно вышеуказанному принципу, в какой-то момент эта точка исчезнет вовсе, т.е. эти плоскости будут образовывать боковую поверхность призмы с основанием ABC , в которую будет вписана данная сфера. Осталось провести верхнее основание так, чтобы оно касалось той же сферы.

Можно, конечно, спросить, что играет роль функции f в приведенном нами рассуждении. На самом деле, таких функций много; например, можно взять в качестве f разность между 180° и суммой плоских углов, образованных стороной AB треугольника и прямыми, по которым пересекаются плоскости,

проведенные через стороны треугольника; конечно, мы рассматриваем только углы при вершинах A и B и только углы, лежащие по одну сторону от плоскости ABC . Равенство нулю этой разности гарантирует, что прямые параллельны, а значит, проведенные плоскости образуют поверхность призмы.

Итак, задача 2 решена, тем самым, мы доказали *существование изогонально-сопряженной точки для любой точки в треугольнике*.

Приведенное нами рассуждение всем хорошо, однако никакой информации о сфере, кроме того, что она существует, мы из него не получили и получить, по-видимому, не сможем. Конечно, по существу, положение сферы в нашем случае определяется только ее радиусом, раз уж мы знаем ее точку касания с треугольником ABC . Поэтому можно так сформулировать новую задачу.

Задача 3. *Найдите радиус сферы, вписанной в призму, если эта сфера касается основания призмы — данного треугольника ABC — в данной точке P .*

Понятно, что выражать радиус сферы мы должны через величины, связанные с треугольником и с точкой P . Также ясно, что, когда нам дан треугольник, мы можем пользоваться его длинами сторон, величинами углов и т.п. Но что значит «данная точка внутри треугольника»? Чем определяется такая точка? Конечно, нам бы хотелось, чтобы наш способ задавать точку был связан с треугольником, иначе будет трудно связать друг с другом два условия задачи — треугольник и точку.

Способов описать положение точки внутри треугольника так, чтобы было выполнено оговоренное выше условие, много. Можно, например, выразить вектор $\overrightarrow{AP}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ и использовать коэффициенты этого разложения для определения положения точки. Правда, при этом вершины треугольника будут не совсем равноправны — точка A , очевидно, будет играть существенно иную роль, чем B и C .

Если действовать более геометрически, можно провести лучи через вершины треугольника и точку P . Тогда положение точки P будет определяться положением проведенных лучей, которые, в свою очередь, надо

как-то определить: или при помощи фиксации точек их пересечения с противоположными сторонами треугольника, или при помощи указания углов, которые они образуют со сторонами треугольника. Такое определение лучше, так как все три луча играют примерно одинаковую роль; правда, выбирать лучи мы можем не совсем свободно — теорема Чевы (и обычная, и «в синусах») показывает, что произведение отношений отрезков, на которые проведенные лучи делят противоположные стороны (или отношения синусов углов, на которые углы треугольника делятся проведенными лучами), равно 1. Хотя, конечно, все приведенные методы задания точки в треугольнике взаимно эквивалентны — всегда можно вычислить одни данные, если известны другие, — но все равно, задавать точку набором из трех чисел такого рода гораздо удобнее, если мы хотим изучать геометрию треугольника.

Правда, такого рода троек чисел можно указать довольно много: помимо отношений отрезков или синусов углов, можно брать площади треугольников ABP , BSP , CAP или, скажем, длины отрезков AP , BP , CP и тому подобное. Нам для наших целей будет удобно использовать в качестве «координат» точки P ее расстояния до сторон треугольника: $PQ = u$, $PR = v$, $PS = w$ (рис.3). Кстати,

Рис. 3

кавычки в данном случае не очень нужны: введенная тройка (u, v, w) , рассматриваемая с точностью до умножения на константу, в математической литературе часто на-

зываются *трилинейными координатами*.

Уточним теперь формулировку задачи.

Задача 3'. Пусть в данном треугольнике ABC задана точка P , расстояния от которой до прямых AB , BC , CA равны u , v , w , соответственно. Найдите радиус r_0 сферы, вписанной в призму с основанием ABC и касающейся основания в точке P (выразите его через параметры треугольника и трилинейные координаты точки).

Сначала мы решим эту задачу вычислительно — используя тригонометрию, векторы (по пути вспомним свойства смешанного

произведения) и т.д., и получим формулу

$$r_0^2 = \frac{uvw(w \sin \beta + v \sin \alpha + u \sin \gamma)}{uv \sin \beta + uw \sin \alpha + vw \sin \gamma} \quad (1)$$

(где $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$ — углы треугольника). После этого мы получим другие формулы для r_0 , обсудим подходы к их выводу, а также связи с другими задачами и возможные обобщения.

Решение задачи 3'. Проведем через стороны треугольника плоскости, касательные к сфере. Понятно, что эти плоскости образуют боковую поверхность призмы в том и только в том случае, когда радиусы, проведенные в точки касания сферы с ними, лежат в одной плоскости.

Итак, нам надо так подобрать r_0 , чтобы соответствующие отрезки попали в одну плоскость. Для этого мы воспользуемся следующим критерием коллинеарности векторов: три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лежат в одной плоскости, если и только если объем параллелепипеда, «натянутого» на них, равен нулю. В аналитической геометрии объем такого параллелепипеда называется смешанным произведением векторов, точнее говоря, модулем смешанного произведения:

$$\text{vol}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \left| \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle \right|.$$

Само смешанное произведение часто называют «направленным объемом параллелепипеда»; по определению, он совпадает с обычным объемом, если тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — *положительная*, т.е. если направление вектора $\vec{c}$ связано с направлениями $\vec{a}$, $\vec{b}$ «правилым буравчиком». В противном случае $\left| \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle \right| = -\text{vol}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Несложно проверить, что величина $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$, определенная таким образом, удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = -\langle \vec{b}, \vec{a}, \vec{c} \rangle = -\langle \vec{a}, \vec{c}, \vec{b} \rangle$;
- 2) $\langle \vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c} \rangle$;
- 3) $\langle \lambda \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$

для всех векторов $\vec{a}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и всех чисел λ . Отметим, что из свойства 1 следует, что

$$\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = -\langle \vec{b}, \vec{a}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{c}, \vec{a} \rangle = -\langle \vec{c}, \vec{b}, \vec{a} \rangle.$$

И вообще, для любой наперед заданной перестановки векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ мы получим, что соответствующее смешанное произведение с точностью до знака совпадает с $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$.

Кроме того, ясно, что если взять в качестве векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ единичные векторы, направленные вдоль координатных осей Ox , Oy , Oz соответственно, то, очевидно, $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = 1$.

Оказывается, этого достаточно, чтобы написать формулу, выражающую $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ через координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. В самом деле, так как, переставляя два соседних вектора, мы можем получить любой наперед заданный порядок, свойства, аналогичные 2 и 3, будут выполнены для всех векторов в выражении $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$. С другой стороны, мы можем любой вектор выразить в виде суммы единичных векторов, направленных вдоль осей координат с коэффициентами, как раз равными координатам векторов.

Вооружившись этими знаниями, рассмотрим сечение нашей призмы плоскостью, проходящей через центр O искомой сферы и ее точки касания с основанием ABC и боковой стороной BB_1C_1C (точки T и A_0 , на рисунке 4). Треугольник OTQ прямоугольный (Q – точка пересечения плоскости и отрезка BC); его катеты равны w и r_0 , поэтому тангенс угла $\varphi = \angle OQT$ равен $\frac{r_0}{w}$. Так как QO – биссектриса, то величина угла $\angle A_0QT$ равна 2φ , а его тангенс равен

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{2r_0 w}{w^2 - r_0^2}.$$

Рассмотрим теперь единичный вектор $\vec{z}$, направленный вертикально вверх, и единичный вектор $\vec{a}_1$ в плоскости ABC , направленный перпендикулярно стороне BC основания призмы во внешнюю сторону относительно треугольника. Из рисунка 4 видно, что вектор $\vec{r}_a = \vec{OA}_0$ может быть представлен в виде суммы:

$$\vec{r}_a = \cos 2\varphi \cdot \vec{z} + \sin 2\varphi \cdot \vec{a}_1.$$

Поэтому после преобразований с использованием тригонометрических тождеств $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1$ получим

$$\vec{r}_a = \frac{w^2 - r_0^2}{w^2 + r_0^2} \cdot \vec{z} + \frac{4r_0 w}{w^2 + r_0^2} \cdot \vec{a}_1$$

(мы принимаем во внимание, что угол 2φ тупой, если и только если $w < r_0$). Аналогичные рассуждения дают следующие выражения для $\vec{r}_b = \vec{OB}_0$ и $\vec{r}_c = \vec{OC}_0$:

$$\vec{r}_b = \frac{v^2 - r_0^2}{v^2 + r_0^2} \cdot \vec{z} + \frac{4r_0 v}{v^2 + r_0^2} \cdot \vec{b}_1,$$

$$\vec{r}_c = \frac{u^2 - r_0^2}{u^2 + r_0^2} \cdot \vec{z} + \frac{4r_0 u}{u^2 + r_0^2} \cdot \vec{c}_1,$$

где мы обозначили символами $\vec{b}_1$ и $\vec{c}_1$ единичные векторы в плоскости ABC , перпендикулярные сторонам AC и AB соответственно (и направленные во внешнюю сторону относительно треугольника ABC). Чтобы найти теперь смешанное произведение векторов $\vec{r}_a$, $\vec{r}_b$, $\vec{r}_c$, мы воспользуемся тем, что по сделанному ранее замечанию $\vec{z}$ может появиться только один раз в каждом месте выражения $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$, и поэтому

$$\begin{aligned} \langle \vec{r}_a, \vec{r}_b, \vec{r}_c \rangle &= \frac{u^2 - r_0^2}{u^2 + r_0^2} \cdot \frac{4r_0 v}{v^2 + r_0^2} \cdot \frac{4r_0 w}{w^2 + r_0^2} \langle \vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{z} \rangle + \\ &+ \frac{4r_0 u}{u^2 + r_0^2} \cdot \frac{v^2 - r_0^2}{v^2 + r_0^2} \cdot \frac{4r_0 w}{w^2 + r_0^2} \langle \vec{c}_1, \vec{a}_1, \vec{z} \rangle + \\ &+ \frac{4r_0 u}{u^2 + r_0^2} \cdot \frac{4r_0 v}{v^2 + r_0^2} \cdot \frac{w^2 - r_0^2}{w^2 + r_0^2} \langle \vec{b}_1, \vec{c}_1, \vec{z} \rangle. \end{aligned}$$

С другой стороны, смешанные произведения, стоящие справа это объемы прямых параллелепипедов высоты 1 с основанием – ромбом, образованным $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$, $\vec{c}_1$ (несложно видеть, что все знаки при этих объемах отсутствуют). Так как по определению векторов $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$, $\vec{c}_1$ углы между ними дополняют до 180° углы треугольника, получаем

$$\langle \vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{c}_1 \rangle = \sin \gamma, \langle \vec{c}_1, \vec{a}_1, \vec{z} \rangle = \sin \beta, \langle \vec{b}_1, \vec{c}_1, \vec{z} \rangle = \sin \alpha.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \langle \vec{r}_a, \vec{r}_b, \vec{r}_c \rangle &= 16r_0^2 \left((uvw(w \sin \beta + v \sin \alpha + \right. \\ &+ u \sin \gamma)) - r_0^2 (uv \sin \beta + uw \sin \alpha + \\ &+ vw \sin \gamma)) : (u^2 + r_0^2)(v^2 + r_0^2)(w^2 + r_0^2) \Big). \end{aligned}$$

Равенство нулю этого выражения эквивалентно обращению в ноль числителя дроби, откуда получаем искомое выражение для r_0 из правой части формулы (1).

Прежде всего отметим, что получившееся выражение всегда имеет смысл: так как α , β и γ – углы треугольника, их синусы всегда положительные, а значит, дробь, стоящая справа, всегда положительная. Поэтому, нам можно не беспокоиться – наша формула всегда дает ответ на поставленный вопрос.

Таким образом, формула (1), полученная нами, всем хороша, кроме одного: мы получили ее чисто алгебраически, а значит, нам будет трудно понять, каковы геометрические свойства у этого выражения. Да и вообще, хотелось бы иметь более «синтетическое», «школьное» решение нашей задачи.

Давайте для начала посмотрим повнимательнее на получившееся выражение: в знаменателе формулы (1) стоит сумма $uv \sin \beta + u \sin \alpha + vw \sin \gamma$. Так как $\sin(180^\circ - x) = \sin x$, мы видим (рис.5), что эта сумма

Рис. 5

равна удвоенной площади треугольника QRS . С другой стороны, в числителе дроби стоит выражение

$$uvw(w \sin \beta + v \sin \alpha + u \sin \gamma) = uvw \left(w \frac{b}{2R} + v \frac{a}{2R} + u \frac{c}{2R} \right),$$

где a , b , c – стороны треугольника ABC , а R – радиус описанной около него окружности (мы воспользовались теоремой синусов).

Так как $\frac{1}{2}av = S_{BCP}$, $\frac{1}{2}bw = S_{CAP}$, $\frac{1}{2}cu = S_{ABP}$,

мы видим, что числитель дроби равен $\frac{uvw}{R} S_{ABC}$. В итоге мы получаем следующую формулу для радиуса сферы:

$$r_0^2 = \frac{uvw}{2R} \cdot \frac{S_{ABC}}{S_{QRS}}. \quad (2)$$

Согласно знаменитой теореме Эйлера о площади педального треугольника,

$$S_{QRS} = \frac{R^2 - d^2}{4R^2} S_{ABC},$$

где d – расстояние от P до центра описанной около ABC окружности. Подставляя это выражение в формулу для радиуса сферы, получаем

$$r_0^2 = \frac{2Ru vw}{R^2 - d^2}. \quad (3)$$

Эта формула гораздо проще и симметричнее предыдущей, однако оставляет не меньше вопросов; прежде всего, непонятно, можно ли получить выражение, стоящее справа, исходя из геометрических соображений?

Признаюсь честно, ответа на этот вопрос у меня нет, и если кто-нибудь из читателей найдет решение, выдающее полученное нами выражение для r_0 , исходя из чисто геометрических соображений, и не использующее большого количества выкладок, я буду рад на него посмотреть. Однако приведу рассуждение, позволяющее немного сократить вычисления и заодно проясняющее связь между радиусом вписанной сферы и свойствами изогонального сопряжения.

Посмотрите на рисунок 6: на нем изображено сечение данной призмы плоскостью,

Рис. 6

проходящей через центр сферы и точки ее касания с основанием и гранью BB_1A_1A . Видно, что получившаяся фигура является трапецией с прямыми углами при вершинах T и T' . В силу равенства отрезков касательных получаем, что $QQ' = u + u'$ (где u' – расстояние от точки касания сферы с верхним основанием призмы Q' до стороны B_1A_1). Проведя высоту призмы через Q' , получаем прямоугольный треугольник QUQ' с кате-

тами $|u - u'|$ и $2r_0$. Отсюда по теореме Пифагора получаем

$$4r_0^2 = (u + u')^2 - (u - u')^2 = 4uu',$$

т.е. $uu' = r_0^2$. Мы видим, что r_0 очень просто выражается через расстояния u и u' . Таким же образом,

$$uu' = vv' = ww' = r_0^2. \quad (4)$$

Следовательно, $u' = \frac{r_0^2}{u}$, $v' = \frac{r_0^2}{v}$, $w' = \frac{r_0^2}{w}$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} cu + av + bw &= 2S_{ABC} = 2S_{A_1B_1C_1} = \\ &= cu' + av' + bw' = c \frac{r_0^2}{u} + a \frac{r_0^2}{v} + b \frac{r_0^2}{w}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$r_0^2 = 2S_{ABC} : \left(\frac{c}{u} + \frac{a}{v} + \frac{b}{w} \right),$$

что с помощью теоремы синусов несложно преобразовать к уже знакомому нам виду

$$r_0^2 = \frac{uvw}{2R} \cdot \frac{S_{ABC}}{S_{QRS}}.$$

Такое решение, конечно, выглядит проще, чем предыдущее, но оно тоже в конечном итоге объясняет появление площади треугольника QRS при помощи теоремы синусов и некоторого количества преобразований. Кроме того, оно позволяет нам получить формулу, выражающую расстояния u' , v' , w' от точки, изогонально сопряженной данной, до прямых, содержащих стороны треугольника:

$$\begin{aligned} u' &= \frac{r^2}{u} = \frac{2Rvw}{R^2 - d^2}, \quad v' = \frac{r^2}{v} = \frac{2Ru w}{R^2 - d^2}, \\ w' &= \frac{r^2}{w} = \frac{2Ruv}{R^2 - d^2}. \end{aligned}$$

Конечно, эти формулы известны, но интересно, однако, что мы пришли к ним из стереометрических соображений.

Завершая разговор, приведем обобщения для описанной вокруг сферы усеченной треугольной пирамиды. Основания такой усеченной пирамиды – треугольники ABC и $A'B'C'$, у которых соответствующие стороны параллельны. Таким образом, случай призм возникает при равенстве треугольников ABC и $A'B'C'$. Доказательства предложен-

ных утверждений мы не приводим. Читатель может попробовать доказать их самостоятельно (хотя доказать их не так просто).

Утверждение 2. Если сфера, вписанная в усеченную треугольную пирамиду, касается основания ABC в некоторой точке P , а основания $A'B'C'$ – в точке P' , то преобразование подобия, которое переводит треугольник $A'B'C'$ в ABC , будет переводить точку P' в точку, изогонально сопряженную точке P (относительно треугольника ABC).

Утверждение 2'. Пусть дан трехгранный угол и плоскость, пересекающая его по треугольнику ABC . В трехгранный угол вписаны две сферы, касающиеся плоскости ABC в точках P и P' . Тогда P и P' – изогонально сопряженные точки треугольника ABC .

Задача 4 (А. Заславский, XVII Олимпиада по геометрии имени И.Ф.Шарыгина). В усеченную треугольную пирамиду вписана сфера, касающаяся оснований в точках T_1 , T_2 . Пусть h – высота пирамиды, а R_1 , R_2 – радиусы окружностей, описанных около ее оснований, O_1 , O_2 – центры этих окружностей. Докажите, что

$$R_1 R_2 h^2 = (R_1^2 - O_1 T_1^2)(R_2^2 - O_2 T_2^2). \quad (5)$$

Отметим, что формула (5) согласуется с нашей формулой (3).

В самом деле, для случая описанной призм формула (5) приобретает вид

$$4R^2 r_0^2 = (R^2 - d^2)(R^2 - d'^2), \quad (6)$$

поскольку $R_1 = R_2 = R$, $h = 2r_0$, $O_1 T_1 = d$ и аналогично $O_2 T_2 = d'$ для изогонально сопряженной точки. Теперь равенство (6) можно получить, перемножив формулу (3) с такой же формулой для изогонально сопряженной точки и воспользовавшись равенствами (4).

Автор благодарит Павла Кожевникова за многочисленные важные и полезные замечания и добавления, которые в значительной мере улучшили текст.