Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Стасенко, Издалека долго течет река ..., *Квант*, 2021, номер 6, 36–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20210606>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 13:04:22

Издавека долго течет река...

А. СТАСЕНКО

*В природе ...всюду разлито чувство,
но только в реках содержится мысль.*

Алексей Иванов

Рек на Земле – великое множество. Среди них есть полноводные потоки, породившие пышные цивилизации (Нил, Евфрат...), и мифические реки забвения (Лета, Стикс). А кто же не знает русских рек – от Волги и Дона до Лены и Амура...

Любая река – сложный организм, не удивительно, что к концу прошлого тысячелетия уже существовало более 350 феноменологических теорий речных процессов. Однако это не остановило некоего Способного ЕГЭшника, который решил развить самую современную физико-математическую модель реки. Конечно, как полагается во всякой приличной модели, приняв «ряд упрощающих предположений».

Прежде всего наш исследователь вспомнил о динамике тела переменной массы $m(t)$, которая описывается известным (1897) уравнением Мещерского (1859–1935), содержащим секундный расход массы $\mu = -\frac{dm}{dt}$ ($[\mu] = \text{кг/с}$) и скорость движения этой массы относительно тела u :

$$m \frac{dv}{dt} = \mu u + F.$$

В отсутствие внешних сил ($F = 0$) отсюда получается знаменитое уравнение (1903) Циолковского (1857–1935), лежащее в основе современной ракетной техники:

$$m dv = -u dm, \text{ или } \frac{v}{u} = \ln \frac{m_0}{m(t)}.$$

Здесь положено $v = 0$ и $m = m_0$ в начальный момент времени $t = 0$, а расход массы μ считается постоянным, так что $m = m_0 - \mu t$ (рис.1).

Заметим, что подобные исследования неоднократно проводились в течение 19-го века,

Рис. 1. Ракета жертвует массой и может приобрести сколь угодно большую скорость

но, значительно опережая свое время, не произвели того впечатления, которое выпало на долю более поздних исследований начала 20-го столетия.

Другой пример – рост капли, которая начинает падать в поле тяжести (ускорение g) в облаке неподвижных микрокапель со средней плотностью ρ_k . Рост массы падающей капли описывается уравнением

$$\frac{dm}{dt} = \pi v r^2 \rho_k = \mu > 0.$$

При этом относительная скорость прилипающих микрокапель равна $u = -v$, так что уравнение Мещерского дает

$$m \frac{dv}{dt} = mg - v \frac{dm}{dt}, \text{ или } \frac{d(mv)}{dt} = mg.$$

Учитывая, что $m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_k$, из этих уравнений получим (рис.2)

$$m \sim r^3 \sim at^6, \quad r \sim x = \frac{at^2}{2}, \quad a = \frac{g}{7},$$

Рис. 2. Инертные микрокапли облака, сливаясь с падающей макрокаплей, значительно уменьшают ускорение последней. Показан результат в начале процесса, когда сопротивлением воздуха еще можно пренебречь

Рис. 3. Модель реки, поток воды в которой растет за счет притоков; α — угол наклона равнины, по которой течет река

где x — расстояние, пройденное с начального момента, ρ_v — плотность воды, r — радиус капли, a — ее ускорение.

А как же река? В отличие от ракеты, теряющей массу ради увеличения скорости, расход воды в реке растет за счет притоков. Если слева и справа порции воды прибывают под прямым углом к руслу реки (рис.3), последней приходится ускорять их, как и капле, падающей в облаке (вспомним, что $u = -v$). Расход воды $\rho_v v s$ можно выражать в кг/с, но поскольку плотность воды почти постоянна, то в речном хозяйстве ее расход sv выражают в м³/с. Изменение этой величины вдоль x (вдоль течения) запишется в виде

$$\frac{d(sv)}{dx} = q, \quad [q] = \frac{m^3}{c \cdot m_x}.$$

Здесь введен «метр вдоль потока — m_x », во избежание искушения сократить его с кубометрами.

Напомним, что существует два подхода в динамике непрерывной среды, связанных с именами двух великих ученых. Согласно Лагранжу (1736–1813), предлагается выделить, т.е. пометить начальными значениями координат, частицу среды и следить за изменением во времени этих значений вдоль траектории частицы. Согласно Эйлеру (1707–1783), течение непрерывной среды анализируется в различных точках пространства в данный отрезок времени.

Оценивая выше динамику капли в облаке, мы приняли подход Лагранжа. Для эволюции параметров реки как пространственно протяженного тела целесообразно принять точку зрения Эйлера. Для наших целей

достаточно иметь в виду связь между этими подходами — масса тела заменяется плотностью потока массы: $m \leftrightarrow \rho sv$, производная по времени заменяется производной по пространству: $\frac{d}{dt} \leftrightarrow v \frac{d}{dx}$, что вполне очевидно, так как $v = \frac{dx}{dt}$. Подчеркнем, что

здесь рассматривается *стационарное* течение реки. По сути, мы уже использовали эту замену при формировании уравнения расхода массы.

При выводе уравнения импульсов для текущей реки вспомним вывод уравнения динамики капли переменной массы, растущей за счет встречных инертных микрокапель:

$$m \frac{dv}{dt} = -v \frac{dm}{dt} + mg, \text{ или } \frac{d(mv)}{dt} = mg.$$

Для реки, текущей по наклонной плоскости, получим

$$sv \frac{dv}{dx} = -v \frac{d(sv)}{dx} + sg \sin \alpha + \frac{f}{\rho_v},$$

так что

$$\frac{d(sv \cdot v)}{dx} = sg \sin \alpha + \frac{f}{\rho_v}.$$

Здесь мы уже поделили на плотность воды и кроме скатывающей силы учли тормозящую силу, приходящуюся на единицу длины реки, от всех притоков. Однако, по крайней мере из соображений размерности, можно записать выражение этой силы в виде $\xi \rho_v v^2 b \Delta x$, в котором все особенности «спрятаны» в коэффициенте ξ . (Неплохо было бы, подумал наш способный герой, оценить хотя бы порядок этого коэффициента.) В результате получим изменение импульса потока жидкости в виде

$$\frac{d(sv \cdot v)}{dx} = sg \sin \alpha - \xi v^2 b.$$

Здесь учтено, что река широка, но не очень глубока относительно своей ширины: $\frac{h}{b} \ll 1$, поэтому «смоченный» периметр почти равен b (см. рис.3).

Для удобства анализа уравнений часто используют масштабирование переменных, относя их к соответствующим характерным значениям. В рассматриваемом случае такими масштабами можно выбрать значения

переменных в устье реки: скорость V , сечение потока S , длина реки L . Проведя это масштабирование и сохраняя для простоты прежние обозначения (но ничего не забывая), запишем систему уравнений в «безразмерном» виде:

$$\frac{d(sv)}{dx} = q \frac{L}{SV}, \quad \frac{d(sv \cdot v)}{dx} = As - Bv^2 \sqrt{s},$$

где $A = \frac{Lg \sin \alpha}{V^2}$, $B = \xi \frac{L\sqrt{B/H}}{\sqrt{S}}$. Даже не решая полученную систему уравнений (кто хочет – почему бы нет?), можно получить важные сведения. В частности, первый коэффициент A в правой части второго уравнения имеет глубокий физический смысл. Ведь равенство

$$\frac{V_{\max}^2}{2} = gY$$

определяет максимальную скорость, которую приобретает тело или та же река, свободно падая с высоты $Y = L \sin \alpha$. Второе слагаемое содержит все геометрические масштабы реки – длину, ширину, глубину.

Однако, подумал Способный ЕГЭшник, пора сделать некоторые численные оценки. Примем следующие значения определяющих параметров, характерные для «типичной» равнинной реки: $L = 3000$ км, $S = 10^4$ м², $B/H = 10^2$, $Y = 300$ м, $\alpha = 10^{-4}$ рад., $V = 1$ м/с. Отметим, в частности, что вследствие малости угла наклона долины можно положить $\sin \alpha \approx \alpha$. Уравнение импульсов в безразмер-

ных переменных примет вид

$$\frac{d(sv \cdot v)}{dx} = 3 \cdot 10^3 s - \xi v^2 \sqrt{s} \cdot 3 \cdot 10^5.$$

Видно, что первый численный коэффициент A в правой части уравнения намного превышает единицу, а ведь наибольшие значения всех искомым переменных равны единице, согласно выполненному масштабированию. Следовательно, левая часть уравнения не превышает единицы, а значит, и второе слагаемое справа почти равно первому. Таким образом, мы имеем малую разность двух больших величин, описывающих скатывающую силу и силу торможения, и эту разность можно положить равной нулю. (Фактически это означает, что силой инерции можно пренебречь. Иначе, сидя в лодке, увлекаемой потоком, мы почувствовали бы, что нас отбрасывает к корме.) Отсюда, положив $v = 1$, $s = 1$, получим полезную оценку коэффициента: $\xi = 10^{-2}$.

Конечно, в приведенных выше рассуждениях не учтено влияние дождей, испарения, подводных ключей, гейзеров, русалок и водяных, инфильтрации воды в грунт, ветровых волн, силы Кориолиса (ведь Земля вращается)... Но «не заграждай источника, который готов произвести из себя большую реку» (Григорий Богослов).

Впрочем, кто мешает вдумчивому Читателю учесть все это в более совершенных физико – математических моделях?

НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

Что такое дождевание

С.ДВОРЯНИНОВ

Прекрасное время года – весна. Одно может беспокоить: внезапное изменение погоды. Ориентироваться только на календарь нельзя: то вдруг подует холодный ветер, то заморозки нагрянут. А еще бывает и так, что пройдет ледяной дождь.

У человека при этом нет никаких проблем. Как сказал поэт, у природы нет плохой погоды. В доме можно снова включить отопление, а выходя на улицу, надеть теплую куртку и шапку. Но вот у Природы...

Больно видеть, как покрываются коркой льда ветки деревьев с распустившимися цветками (рис.1) или как на газонах закрываются и ждут тепла знакомые нам одуванчики (рис.2). А что делать с цветущими плодовыми деревьями и кустарниками? Как защитить их от поздних весенних заморозков? Низкая температура может свести на нет весь будущий урожай.