Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Веселов, Чебышёв, Абель и эллиптические интегралы,
Квант, 2021, номер 7, 2–7

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20210701>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 06:35:18

Чебышёв, Абель и эллиптические интегралы

А. ВЕСЕЛОВ

XIX век заслуженно считается золотым веком математики, и замечательно, что Россия дала такого выдающегося ее представителя, как Пафнутий Львович Чебышёв. По широте математических интересов и глубине результатов Чебышёв и его, без преувеличения, великая школа безусловно находятся на уровне той грандиозной математической эпохи.

Я расскажу здесь о замечательных результатах Чебышёва [1], продолживших исследования, начатые гениальным норвежским математиком Нильсом Хенриком Абелем [2] и известных не так широко, как они этого заслуживают.

Чтобы понять основные результаты этих работ, от читателя потребуется только умение дифференцировать и знакомство с понятием интеграла.

Абель начинает свою работу [2] с дифференцирования функции

$$f(x) = \ln \frac{p(x) + q(x)\sqrt{R(x)}}{p(x) - q(x)\sqrt{R(x)}},$$

где $p(x)$, $q(x)$, $R(x)$ – некоторые многочлены. Применяя известные свойства производной и логарифма – в частности, формулу $(\ln x)' = 1/x$ – имеем

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{p' + (q\sqrt{R})'}{p + q\sqrt{R}} - \frac{p' - (q\sqrt{R})'}{p - q\sqrt{R}} = \\ &= \frac{2p(q\sqrt{R})' - 2p'q\sqrt{R}}{p^2 - Rq^2} = \frac{pqR' + 2(pq' - qp')R}{(p^2 - Rq^2)\sqrt{R}}. \end{aligned}$$

(Для краткости мы будем иногда писать просто p , q , R вместо $p(x)$, $q(x)$, $R(x)$.)

Таким образом, производная функции $f(x)$ имеет вид

$$f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{R(x)}},$$

Пафнутий Львович Чебышёв (1821 – 1894)

Нильс Хенрик Абель (1802 – 1829)

где

$$g(x) = \frac{pqR' + 2(pq' - qp')R}{p^2 - Rq^2}$$

есть рациональная функция, т.е. функция, являющаяся отношением двух многочленов. Другими словами, для такой функции g неопределенный интеграл

$$\int \frac{g(x)dx}{\sqrt{R(x)}} = \ln \frac{p(x) + q(x)\sqrt{R(x)}}{p(x) - q(x)\sqrt{R(x)}}$$

выражается в алгебраических и логарифмических функциях. Будем называть подобные функции *элементарными*, добавив к ним все функции, известные из школы, включая тригонометрические функции и им обратные.

Абель задался следующим вопросом:

Как описать все интегралы вида

$$I = \int \frac{g(x)dx}{\sqrt{R(x)}},$$

которые могут быть выражены в элементарных функциях, где $g(x)$ рациональна, а $R(x)$ — многочлен четной степени?

Из стандартного университетского курса математического анализа известно, что для многочленов $R(x)$ степени 2 годится любой многочлен $g(x)$, так что вопрос начинается со степени 4 и уже здесь оказывается очень нетривиальным.

Теперь надо объяснить, почему этот вопрос был для Абеля очень естественным и важным. Есть такая замечательная кривая — эллипс (рис. 1), которую можно задать уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b,$$

или как множество точек X таких, что сумма расстояний d_1 и d_2 до двух заданных

Рис. 1

на плоскости точек F_1 и F_2 (называемых *фокусами*) постоянна:

$$d_1 + d_2 = F_1X + F_2X = 2a.$$

В декартовой системе фокусы имеют координаты $(\pm c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Рассмотрим дугу эллипса от точки $A = (a; 0)$ до $X = (x_0; y_0)$. Ее длина находится по общей формуле как интеграл

$$L = \int_{x_0}^a \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

В нашем случае

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad y' = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}},$$

так что

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + (y'(x))^2} &= \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^2 (a^2 - x^2)}} = \\ &= \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2 (a^2 - x^2)}} = \sqrt{\frac{a^4 - c^2 x^2}{a^2 (a^2 - x^2)}}. \end{aligned}$$

Определим *эксцентриситет* эллипса как отношение $e = \frac{c}{a} < 1$; при $e = 0$ эллипс превращается в окружность ($a = b$).

Таким образом, длина дуги эллипса от $A = (a; 0)$ до $X = (x_0; y_0)$ задается интегралом

$$L = \int_{x_0}^a \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}} dx = \int_{x_0}^a \frac{(a^2 - e^2 x^2) dx}{\sqrt{(a^2 - e^2 x^2)(a^2 - x^2)}},$$

являющимся частным случаем интеграла I с $g(x) = a^2 - e^2 x^2$, $R(x) = (a^2 - e^2 x^2)(a^2 - x^2)$.

По этой причине все интегралы вида I с многочленом $R(x)$ четвертой степени и рациональной $g(x)$ называются *эллиптическими*, а графики $y = \sqrt{R(x)}$, или, точнее, кривые, заданные уравнением $y^2 = R(x)$, называются *эллиптическими кривыми*. Отметим, что название не самое удачное, так как сам эллипс эллиптической кривой не является.

Историческое замечание. Термин «эллиптический» в этом контексте впервые,

по-видимому, использовался итальянским математиком XVIII века графом Фаньяно, который, помимо эллипса, интересовался длиной дуги *лемнискаты Бернулли*

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2,$$

задаваемой неопределенным интегралом

$$L = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Исследования Фаньяно были продолжены Эйлером, а затем Лежандром. Абель заинтересовался эллиптическими интегралами в связи с делением лемнискаты на равные части циркулем и линейкой (по аналогии с той же задачей для окружности, блистательно решенной Гауссом). Подробности можно найти в замечательной книге В.В.Прасолова и Ю.П.Соловьева [3].

Приведем пример. Эллипсу $2x^2 + 4y^2 = 1$ соответствует эллиптическая кривая $y^2 = (a^2 - e^2 x^2)(a^2 - x^2)$, где $a^2 = e^2 = 1/2$ (рис. 2).

Рис. 2. Эллипс и соответствующая эллиптическая кривая

Заметим, что для окружности радиуса a многочлен $R(x)$ имеет степень 2 и длина дуги дается стандартным интегралом

$$L = a \int_{x_0}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a \arccos \frac{x_0}{a}.$$

Действительно, угол $\alpha = L/a$ в радианах равен отношению длины дуги к радиусу, а координата x_0 равна $a \cos \alpha$.

Также элементарен «параболический» интеграл, дающий длину дуги параболы $y = ax^2$ (проверьте!):

$$\int_0^{x_0} \sqrt{1 + 4a^2 x^2} dx = \frac{1}{2} x_0 \sqrt{1 + 4a^2 x_0^2} + \frac{1}{4a} \ln \left(2ax_0 + \sqrt{1 + 4a^2 x_0^2} \right).$$

Возвращаясь к эллипсам с разными полуосями, мы можем сформулировать вопрос Абеля в этом частном случае так: можно ли длину дуги такого эллипса выразить в элементарных функциях?

Здесь уместно напомнить, что Абель наиболее знаменит своей теоремой о неразрешимости в радикалах алгебраических уравнений степени выше пятой. Доказательство этой теоремы можно найти в книге В.Б.Алексеева [4], основанной на лекциях В.И. Арнольда в ФМШ 18 (теперь СУНЦ) при МГУ. Рассматриваемый в этой статье вопрос Абеля можно переформулировать в том же ключе: для каких $g(x)$ и $R(x)$ дифференциальное уравнение на функцию $y(x)$

$$y'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{R(x)}}$$

имеет решение в элементарных функциях?

Разумеется, в аккуратной постановке задачи понятие элементарной функции нуждается в точном определении (впрочем, как и понятие решения уравнения в радикалах). Соответствующую теорию систематически начал развивать Лиувиль, мотивированный, в частности, работами Абеля. Он доказал, например, что знаменитый неопределенный интеграл $\int e^{-x^2} dx$ не берется в элементарных функциях.

Любознательного читателя отсылаю к книге А.Г.Хованского [5] и статье В.В.Прасолова [6], где можно найти и точные определения.

Из результатов Лиувилля, в частности, следовало, что неопределенный эллиптический интеграл

$$I = \int \frac{g(x)dx}{\sqrt{R(x)}}$$

с многочленом $R(x)$ четвертой степени без кратных корней и многочленом $g(x)$ второй степени никогда не берется в элементарных функциях.

Следовательно, длина дуги эллипса, не являющегося окружностью, никогда не выражается в элементарных функциях. То же самое относится к случаю, когда $g(x)$ – ненулевая константа, например к длине дуги лемнискаты Бернулли.

Естественно спросить, что происходит в случае, когда многочлен $g(x)$ имеет первую степень. Именно этот вопрос и рассматривали Абель и Чебышёв. Этот случай намного богаче, что показывает следующий пример эллиптического интеграла, являющегося элементарной функцией:

$$\begin{aligned} \int \frac{(4x-1)dx}{\sqrt{x^4-2x^3+3x^2+2x+1}} &= \\ &= \ln \left(P(x) + Q(x) \sqrt{x^4-2x^3+3x^2+2x+1} \right), \\ P(x) &= x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2x, \\ Q(x) &= x^2 - 2x + 2 \end{aligned}$$

(проверьте непосредственно дифференцированием правой части).

Предложенный подход к этой проблеме поистине замечателен и использует технику цепных дробей, перенесенную из арифметики в алгебру. Ключевая гениальная идея, восходящая к Абелю и развивая Чебышёвым, заключается в том, что элементарность неопределенного интеграла

$$I = \int \frac{g(x)dx}{\sqrt{R(x)}}$$

с многочленами $g(x)$ и $R(x)$ степени $n-1$

и $2n$ соответственно связана с периодичностью разложения в цепную дробь радикала $\sqrt{R(x)}$. Их подход был мотивирован классической теорией чисел, а более точно – теорией знаменитого диофантова уравнения

$$x^2 - Dy^2 = 1,$$

которое Эйлер по ошибке назвал уравнением Пелля по имени английского математика, не имеющего ничего общего с этим вопросом.

По-видимому, Эйлер имел в виду другого английского математика Брункера, одного из тех, кто нашел общий способ решения этого уравнения через цепные дроби. За подробностями решения этого замечательного уравнения и связи с разложением $\sqrt{D}$ в периодическую цепную дробь я отсылаю к брошюре В.О.Бугаенко [7]. Приведу здесь только самое маленькое решение в частном случае уравнения Пелля

$$x^2 - 61y^2 = 1,$$

использованном Ферма для проверки математического уровня членов английского Королевского общества.¹

$$x_0 = 1766319049, \quad y_0 = 226153980.$$

Рассмотрим теперь решение $p(x)$, $q(x)$ полиномиального аналога уравнения Пелля

$$p(x)^2 - R(x)q(x)^2 = 1,$$

где $R(x)$ – заданный многочлен четной степени. Продифференцируем это уравнение:

$$2pp' - R'q^2 - 2Rqq' = 0.$$

Поскольку из уравнения вытекает, что p и q взаимно просты, из последнего соотношения следует, что q делит p' . Определим многочлен

$$g(x) = \frac{p'(x)}{q(x)}.$$

¹ В феврале 1657 года Пьер Ферма бросил вызов всем математикам (но в первую очередь, английским), предложив найти все решения уравнения Пелля. Один из первых математиков, достойно справившихся с этим вызовом, был первый президент английского Королевского общества Вильям Брункер (1620–1684).

Упражнение 1. Докажите, что для любого решения уравнения Пелля $p(x)$, $q(x)$ и такого $g(x)$ имеет место равенство

$$I = \int \frac{g(x)dx}{\sqrt{R(x)}} = \ln(p(x) + q(x)\sqrt{R(x)}).$$

Альтернативно, можно использовать выкладку Абеля, с которой мы начинали, и определить по решению $p(x)$, $q(x)$

$$g(x) = pqR' + 2(pq' - qp')R,$$

так что соответствующий интеграл

$$\int \frac{g(x)dx}{\sqrt{R(x)}} = \ln \frac{p(x) + q(x)\sqrt{R(x)}}{p(x) - q(x)\sqrt{R(x)}}$$

элементарен.

Нетривиальность задачи состоит в нахождении решений полиномиального уравнения Пелля, поскольку в отличие от целых чисел для многочленов периодичность разложения в цепную дробь $\sqrt{R(x)}$ совсем не гарантируется даже в том случае, когда все коэффициенты являются целыми (см., например, [9]).

В теории чисел Лагранж доказал, что квадратичная иррациональность всегда раскладывается в периодическую цепную дробь, так что надо просто иметь терпение (как, например, в случае Ферма для $\sqrt{61}$). Для многочленов же, говоря словами Чебышёва, «ряд операций, к которому ведет эта метода, может продолжаться до бесконечности, не доставляя какого-либо решительного вывода». Так что вопрос, когда надо остановиться в разложении $\sqrt{R(x)}$ в цепную дробь, оставив надежды на периодичность, является очень нетривиальным. Именно здесь Чебышёв внес решающий вклад, предложив эффективную процедуру для многочленов $R(x)$ степени 4 с рациональными коэффициентами (эти исследования были продолжены его блестящим учеником Егором Ивановичем Золотаревым).

Чебышёв также обнаружил глубокую связь этих вопросов с теорией ортогональных многочленов. В частности, как показал Чебышёв, для элементарного интеграла, задающего длину дуги единичной ок-

ружности

$$L = \int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x,$$

решения соответствующего уравнения Пелля

$$p_n^2(x) - (x^2 - 1)q_{n-1}^2(x) = 1$$

имеют вид $p_n(x) = T_n(x)$, $q_n(x) = U_{n-1}(x)$, где $T_n(x)$, $U_n(x)$ — замечательные многочлены, носящие теперь имя Чебышёва:

$$T_0 = 1, T_1 = x, T_2 = 2x^2 - 1, T_3 = 4x^3 - 3x, \\ T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1, \dots$$

$$U_0 = 1, U_1 = 2x, U_2 = 4x^2 - 1,$$

$$U_3 = 8x^3 - 4x, U_4 = 16x^4 - 12x^2 + 1, \dots$$

Они определяются соотношениями

$$\cos n\varphi = T_n(\cos \varphi), \quad \sin n\varphi = \sin \varphi U_{n-1}(\cos \varphi)$$

и в случае $T_n(x)$ известны также как многочлены со старшим коэффициентом 2^{n-1} , наименее уклоняющиеся от нуля на отрезке $[-1; 1]$.

Сформулируем несколько важных свойств многочленов Чебышёва в виде упражнений для читателя.

Упражнения

2. Докажите, что такие многочлены существуют для любого n , удовлетворяют одному и тому же рекуррентному соотношению

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),$$

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x),$$

но с разными начальными условиями: $T_0 = 1$, $T_1 = x$ и $U_0 = 1$, $U_1 = 2x$.

3. Проверьте, что $U_{n-1} = T'_n(x)/n$ и $p_n(x) = T_n(x)$, $q_n(x) = U_{n-1}(x)$ действительно удовлетворяют уравнению Пелля.

4. Докажите справедливость следующего разложения в цепную дробь

$$\sqrt{x^2 + 1} = x + \frac{1}{2x + \frac{1}{2x + \frac{1}{2x + \dots}}}$$

Угадайте и докажите связь числителей и знаменателей соответствующих подходящих дробей

$$x + \frac{1}{2x} = \frac{2x^2 + 1}{2x}, \quad x + \frac{1}{2x + \frac{1}{2x}} = \frac{4x^3 + 3x}{4x^2 + 1}, \dots$$

с многочленами Чебышёва. (Знакомые с гиперболическими функциями могут дать интерпретацию этих многочленов в терминах этих функций.)

5. Используя стандартную формулу для неопределенного интеграла

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right),$$

выведите, что

$$T_n^*(x) + U_{n-1}^*(x)\sqrt{x^2 + 1} = \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)^n,$$

где $T_n^*(x)$, $U_n^*(x)$ – гиперболические версии многочленов Чебышёва из предыдущего упражнения, и напишите соответствующую формулу для настоящих многочленов Чебышёва.

Замечание. Многочлены Чебышёва удовлетворяют также следующему замечательному свойству: они коммутируют относительно подстановки, т.е.

$$T_m(T_n(x)) = T_n(T_m(x)).$$

Оказывается, что, помимо чистых степеней $P_n(x) = x^n$, это по сути единственные многочлены с таким свойством, но доказательство этого результата, принадлежащее Жюлиа и Фату, очень нетривиально. Любопытный читатель может найти некоторые подробности в замечательной статье И.Н.Бернштейна [8] (написанной для «Кванта» под псевдонимом И.Янтаров).

Интересно, что (под влиянием Абеля) Чебышёв проводит параллель задачи об эллиптическом интеграле с геометрическими построениями циркулем и линейкой. В частности, он связывает неэлементарность интеграла

$$\int \frac{(x+C)dx}{\sqrt{x^4 - 2x^2 - 8x + 9}}$$

с невозможностью построения циркулем и линейкой правильного семиугольника. Действительно, деление окружности на 7 равных частей эквивалентно решению уравнения

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0,$$

которое подстановкой $y = z + 1/z$ сводится к уравнению $y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$, к которому сводится и уравнение $x^4 - 2x^2 - 8x + 9 = 0$.

В заключение отметим, что, несмотря на значительные продвижения в работах Чебышёва и Золотарева, задача Абеля об эффективном описании всех возможных элементарных интегралов вида

$$I = \int \frac{g(x)dx}{\sqrt{R(x)}}$$

с многочленом $R(x)$ четной степени выше 4 с рациональными коэффициентами остается в значительной степени открытой и связана с глубокими арифметическими и алгебро-геометрическими проблемами (см., например, прекрасную статью ван дер Поортена и Чана [9]).

Литература

1. П.Л.Чебышёв. Об интегрировании дифференциалов, содержащих квадратный корень из многочлена третьей и четвертой степени. – Мемуары Императорской Академии наук, – Санкт-Петербург, 1857.
2. Об интегрировании иррациональных дифференциалов. Избранные труды, с.227–255. – М.: Изд-во АН СССР, 1955.
3. N.H.Abel. Über die Integration der Differential-Formel $\frac{\rho dx}{\sqrt{R}}$ wenn R und ρ ganze Funktionen sind. – Journal für reine und angewandte Mathematik **1** (1826), 185–221.
4. В.В.Прасолов, Ю.П.Соловьев. Эллиптические функции и алгебраические уравнения. – М.: Факториал, 1997.
5. В.Б.Алексеев. Теорема Абеля в задачах и решениях. – М.: МЦНМО, 2010.
6. А.Г.Хованский. Топологическая теория Гауля. – М.: МЦНМО, 2008.
7. В.В.Прасолов. Неэлементарность некоторых интегралов элементарных функций. – Математическое просвещение, 2003, выпуск 7, 126–135.
8. В.О.Бугаенко. Уравнения Пелля. – М.: МЦНМО, 2010.
9. И.Янтаров. Коммутирующие многочлены. – «Квант», №4 (1979), 19–23.
10. А.А.Хованский. Топологическая теория Гауля. – М.: МЦНМО, 2008.
11. В.В.Прасолов. Неэлементарность некоторых интегралов элементарных функций. – Математическое просвещение, 2003, выпуск 7, 126–135.
12. В.О.Бугаенко. Уравнения Пелля. – М.: МЦНМО, 2010.
13. И.Янтаров. Коммутирующие многочлены. – «Квант», №4 (1979), 19–23.
14. A.J. van der Poorten, X.C.Tran. Quasi-elliptic integrals and periodic continued fractions. – Monatshefte für Mathematik **131** (2000), 155–169.