Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Гайдуков, А. Румянцев, Об одной олимпиадной задаче по физике, *Квант*, 2021, номер 7, 37–42

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20210704>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 13:12:34

Об одной олимпиадной задаче по физике

Г. ГАЙДУКОВ, А. РУМЯНЦЕВ

Начнем с такой задачи.

Задача Иродова. Три одинаковых шарика, расположенных в вершинах равностороннего треугольника со стороной l , соединены друг с другом нитями. Заряд и масса каждого шарика равны q и m . Одну из нитей пережгли. Найдите максимальную скорость среднего шарика. Силы тяжести нет.

История этой задачи из ставшего уже классическим сборника задач И.Е.Иродова по общей физике для студентов вузов замечательна тем, что спустя десятилетия она расширила «среду обитания» и из вузовских аудиторий распространилась по физическим олимпиадам старшеклассников. При этом, как часто бывает, условие задачи претерпело ряд изменений: масса и заряд среднего шарика стали отличаться от соответствующих равных величин боковых шариков; расположение зарядов из равносторонней конфигурации треугольника превратилось в равнобедренную с заданным углом при вершине. Естественно менялись и вопросы в зависимости от заданных в условии величин. Так, в некоторых вариантах требовалось определить скорости шариков в момент, когда они будут находиться на одной прямой, а также максимальные скорости этих шариков.

Практически все авторы модифицированных задач приводили возможные решения, основываясь на применении законов сохранения импульса и энергии системы шариков, неявно предполагая, что в конфигурации, когда шарики расположены вдоль прямой, их скорости являются максимальными по величине. В данной статье мы проанализируем решение задачи в обобщенной по пара-

метрам системы постановке, фокусируя рассмотрение на вопросе о максимальных величинах скоростей движения шариков.

Обобщенная задача Иродова. В вершинах равнобедренного треугольника с длинами боковых сторон l и углом между ними $2\theta_0$ находятся три небольших по размерам положительно заряженных шарика, связанных попарно тремя легкими нерастяжимыми и непроводящими нитями. Шарики, находящиеся в вершинах основания, имеют массу m и заряд q . Третий шарик имеет массу M и заряд Q . Нить, соединяющую одинаковые шарики, пережигают, и шарики начинают двигаться. Найдите максимальные скорости среднего и боковых шариков. Силы тяжести нет.

Анализ задачи с использованием законов сохранения импульса и энергии

Обозначим $\vec{V}$ и $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ скорости центрального и боковых шариков соответственно. После пережигания нити система шариков будет совершать периодическое колебательное движение. Начальное и промежуточное состояния, а также состояние, соответствующее четверти периода этого движения представлены на рисунке 1. Заметим, что вследствие

Рис. 1. Положение шариков в начальной конфигурации (а), в промежуточной конфигурации (б) и в линейной конфигурации (в)

симметрии действия электрических сил и сил натяжения нитей на центральный шарик он будет двигаться прямолинейно и ускоренно на всей первой четверти цикла вплоть до линейной конфигурации системы. В этом положении действующая на него результирующая сила обращается в ноль, а величина скорости достигает максимального значения.

Для анализа скоростей запишем законы сохранения импульса и энергии (потенциальной энергии электрического взаимодействия зарядов и кинетической энергии движения шариков) в промежуточной конфигурации (см. рис.1,б):

$$M\vec{V} + m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = 0,$$

$$\frac{MV^2}{2} + mv^2 = \frac{kq^2}{2l} \left(\frac{1}{\sin \theta_0} - \frac{1}{\sin \theta} \right)$$

и в линейной конфигурации при $\theta = \pi/2$ (см. рис.1,в):

$$M\vec{V} + 2m\vec{v} = 0,$$

$$\frac{MV^2}{2} + mv^2 = \frac{kq^2}{2l} \left(\frac{1}{\sin \theta_0} - 1 \right),$$

где θ_0 – значение угла θ в начальной конфигурации (см. рис.1,а), $v = |\vec{v}_1| = |\vec{v}_2|$, $\vec{v}$ – вектор скорости боковых шариков в линейной конфигурации.

В линейной конфигурации скорость среднего шарика имеет максимальное значение

$$V_{\max} = V \left(\theta = \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{\frac{mkq^2}{M(M+2m)l} \left(\frac{1}{\sin \theta_0} - 1 \right)},$$

а скорость боковых шариков выражается формулой

$$v \left(\theta = \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Mkq^2}{m(M+2m)l} \left(\frac{1}{\sin \theta_0} - 1 \right)}.$$

Особенности движения при разных отношениях масс шариков

В линейной конфигурации ($\theta = \pi/2$) достигается наибольшее расстояние между крайними шариками, а значит, и кинетическая энергия движения всех шариков максимальная. Часто это интерпретируют как утверждение, что в таком положении достигается максимум скорости и боковых шариков тоже. Однако данная интерпретация

оказывается ошибочной. Например, может реализовываться неожиданная ситуация, в которой скорость боковых шариков в линейной конфигурации будет иметь минимальное значение.

Для пояснения введем параметр $\gamma = M/(2m)$ и рассмотрим предельные случаи большой и малой масс центрального шарика. Так, при $\gamma \gg 1$ центральный шарик практически неподвижен и боковые шарик, двигаясь по круговым траекториям радиусом l , проходят линейную конфигурацию с максимальными скоростями (рис.2,а). В противоположном случае $\gamma \ll 1$ боковые шарик движутся практически прямолинейно (вдоль пунктирной линии на рисунке 2,б). Когда центральный шарик движется сверху вниз и проходит через точку A , боковые шарик расходятся, а в момент прохождения точки B они уже движутся навстречу друг другу. Очевидно, что в линейной конфигурации их скорость при этом обращается в ноль. Именно этот момент и соответствует минимуму скорости; можно сказать, что шарик испытывают упругое отражение. Отметим, что поскольку

Рис. 2. Схематическое изображение системы шариков при $\gamma \rightarrow \infty$ (а) и при $\gamma \rightarrow 0$ (б)

при $\gamma \ll 1$ скорость минимальна в начальной и линейной конфигурациях, то ее максимум имеет место в некотором промежуточном положении.

Визуализировать изменение характера движения системы при варьировании параметра γ можно также с помощью компьютерного моделирования, в котором для каждого шарика численно решаются уравнения движения Ньютона с учетом наложенных на систему связей. Результат моделирования, проведенного с помощью пакета программ LAMMPS (<https://lammmps.sandia.gov/>), можно найти по ссылке <https://www.youtube.com/watch?v=TaWrbTs2aZk>.

Таким образом, из рассмотрения предельных случаев и проведенного моделирования вытекает, что боковые шарики могут проходить линейную конфигурацию как с максимальной, так и с минимальной скоростью. Для произвольного отношения масс шариков будет реализовываться одна из двух ситуаций: либо максимум скорости в промежуточном положении и минимум в линейной конфигурации, либо единственный экстремум в линейной конфигурации, представляющий собой максимум. Точные соотношения между значениями параметров γ и θ_0 , при которых реализуется каждый из этих сценариев, будут установлены позже.

Напомним, что экстремум скорости достигается, когда проекция действующей на шарик силы на направление его движения становится равной нулю. В случае центрального шарика векторы действующей на него силы и скорости всегда коллинеарные, и

экстремум реализуется только в линейной конфигурации ($dV/dt = 0|_{\theta=\pi/2}$) и представляет собой максимум.

На рисунке 3 наглядно показаны ситуации, в которых экстремум скорости бокового шарика достигается в промежуточной (а) и линейной (б) конфигурациях. Сила $\vec{F}$, действующая на боковой шарик, представляет собой сумму электрических сил, вызванных взаимодействием с центральным ($\vec{F}_{qQ}^{\text{эл}}$) и вторым боковым шариком ($\vec{F}_{qq}^{\text{эл}}$), а также силы натяжения нити $\vec{F}_n$. Так как $\vec{F}_{qQ}^{\text{эл}}$ и $\vec{F}_n$ действуют вдоль одной прямой, для их суммы введено обозначение $\vec{F}_{mM} = \vec{F}_{qQ}^{\text{эл}} + \vec{F}_n$.

Связь скоростей центрального и бокового шариков

Для дальнейшего решения обобщенной задачи найдем соотношения между скоростями шариков v и V как функцию их масс m , M и угла θ . Представим скорость движения боковых шариков как сложение векторов скорости $\vec{V}$ конца соединенной с центральным шариком нити и линейной скорости ωl кругового вращения с угловой скоростью $\omega = \Delta\theta/\Delta t$ относительно оси, проходящей через этот конец нити (см. скорость левого шарика на рисунке 1, б). Такое представление соответствует переходу в систему отсчета, движущуюся вместе с центральным шариком, в которой траектория бокового шарика будет представлять собой окружность.

Из векторного представления скорости по теореме косинусов получим

$$v^2 = V^2 + (\omega l)^2 - 2\omega l V \sin \theta = V^2 \cos^2 \theta + (\omega l - V \sin \theta)^2,$$

а из закона сохранения импульса вдоль оси симметрии найдем величину скорости вращения ωl как функцию θ :

$$MV + 2m(V - \omega l \sin \theta) = 0,$$

откуда следует

$$\omega l = \frac{(M + 2m)V}{2m \sin \theta}.$$

Подставляя ωl в выражение для v^2 , получим связь между скоростями шариков в произ-

Рис. 3. Действующие на боковой шарик силы в положении, когда экстремум скорости достигается в промежуточной конфигурации (а) и в линейной конфигурации (б)

вольной конфигурации, задаваемой углом θ :

$$v^2 = V^2 \left(\left(\frac{M+2m}{2m} \right)^2 \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{M+m}{m} \right).$$

Исключая V из последнего уравнения и из формулы для закона сохранения энергии, окончательно получим выражение, которое описывает зависимость v от θ :

$$v^2(\theta) = \frac{kq^2}{2ml} \left(\frac{1}{\sin \theta_0} - \frac{1}{\sin \theta} \right) \left(\frac{1 - (1+2\gamma) \left(\frac{\sin \theta}{1+\gamma} \right)^2}{1 - (1+\gamma) \left(\frac{\sin \theta}{1+\gamma} \right)^2} \right),$$

$$\gamma = \frac{M}{2m}.$$

Экстремум скорости бокового шарика в линейной конфигурации

Полученное точное соотношение для $v^2(\theta)$ при $\theta = \pi/2$, представив зависимость $\sin \theta$ как функцию малого угла отклонения δ ($\theta = \pi/2 + \delta$) от прямолинейной конфигурации. Действительно, $\sin \theta = \sin(\pi/2 + \delta) = \cos \delta \approx 1 - \delta^2/2 + \dots$, при этом $1/\sin \theta = 1 + \delta^2/2 + \dots$ и $\sin^2 \theta = 1 - \delta^2 + \dots$. Заменяя выражения для синусов приближенными формулами, в первом приближении по δ^2 для квадрата скорости получим

$$v^2 \left(\frac{\pi}{2} + \delta \right) = v_m^2 (1 - D(\gamma, \theta_0) \delta^2),$$

где

$$v_m^2 = \frac{kq^2}{2ml} \frac{\gamma}{\gamma + 1} \left(\frac{1 - \sin \theta_0}{\sin \theta_0} \right),$$

а величина коэффициента D перед δ^2 определяется заданными значениями параметров γ , θ_0 обобщенной задачи и равна

$$D(\gamma, \theta_0) = \frac{\sin \theta_0}{2(1 - \sin \theta_0)} - \frac{1 + \gamma}{\gamma^2}.$$

Из этого представления следует, что если $D(\gamma, \theta_0) > 0$, то v^2 при $\theta = \pi/2$ достигает максимума, а если $D(\gamma, \theta_0) < 0$, то v^2 при этом угле достигает локального минимума:

$$v^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) = v_m^2 = \begin{cases} v_{\max}^2, & \text{если } D(\gamma, \theta_0) > 0, \\ v_{\min}^2, & \text{если } D(\gamma, \theta_0) < 0. \end{cases}$$

Остается найти величину максимальной скорости бокового шарика, которая достигается в первой четверти цикла при $\theta_0 < \theta < \pi/2$ для случая $D(\gamma, \theta_0) < 0$. Для удобства анализа введем новую переменную $z = (1 + \gamma)/\sin \theta$, при подстановке которой в выражение для v^2 , получим зависимость вида

$$v^2(z) = \frac{kq^2}{2ml(1+\gamma)} \left(\frac{1+\gamma}{\sin \theta_0} - z \right) \left(\frac{z^2 - (1+2\gamma)}{z^2 - (1+\gamma)} \right),$$

$$z \in \left(1 + \gamma, \frac{1+\gamma}{\sin \theta_0} \right).$$

Условие максимума v^2 внутри указанного интервала приводит к соотношению

$$\frac{dv^2}{d\theta} = \frac{dv^2}{dz} \frac{dz}{d\theta} = 0,$$

которое сводится к уравнению

$$z^4 - (2 + \gamma)z^2 - \frac{2\gamma(1+\gamma)}{\sin \theta_0}z + (1 + 2\gamma)(1 + \gamma) = 0.$$

Это уравнение четвертой степени имеет четыре корня, алгебраические выражения которых в общем случае чрезвычайно громоздкие. Поэтому отметим только наиболее существенные свойства этих корней для нашей физической задачи. Два корня являются комплексно сопряженными, а из двух действительных корней только один удовлетворяет условию $z_m = (1 + \gamma)/\sin \theta_m > 1 + \gamma$, где θ_m – угол, при котором достигается максимальная скорость.

Таким образом, при $D(\gamma, \theta_0) < 0$ получим

$$v_{\max}^2 = v^2(z_m),$$

где z_m является корнем уравнения четвертой степени и $z_m > 1 + \gamma$.

Графическое представление результатов анализа

Теперь представим полученные результаты, используя для наглядности диаграмму параметров γ , θ_0 обобщенной задачи Иродова (рис.4). Условие $D(\gamma, \theta_0) = 0$ разбивает множество возможных решений на две области: внутреннюю, в которой $D(\gamma, \theta_0) > 0$ и значения скоростей центрального и боковых шариков при линейной конфигурации ($\theta = \pi/2$) достигают максимумов, и внешнюю, в которой $D(\gamma, \theta_0) < 0$ и центральный шарик проходит линейную конфигурацию с макси-

Рис. 4. Диаграмма значений функции $D(\gamma, \theta_0)$; звездочкой показана точка, соответствующая первоначальному варианту задачи

мальной скоростью, а скорости боковых шариков имеют локальный минимум.

Так, в оригинальном варианте условия задачи $\gamma = 1/2$, $\theta_0 = \pi/6$ и соответствующая точка диаграммы (выделена звездочкой) лежит в области $D(\gamma, \theta_0) < 0$. Зависимость кинетической энергии бокового шарика $T = T(\theta) = mv^2(\theta)/2$ для этих параметров представлена на рисунке 5,а, где для удобства выполнена нормировка кинетической энергии на величину $U_0 = kq^2/l$. Конфигурация системы при $\theta = \pi/2$ характеризуется локальным минимумом скорости боковых шариков (см. рис.3,б), максимальная же скорость достигается при $\theta_m = 0,985$ рад = $56,4^\circ$ (см. рис.3,а). На рисунке 5,а также приведены графики $T(\theta)$ для других значений параметра γ . Видно, что при уменьшении γ угол θ_m увеличивается и в пределе $\gamma \rightarrow 0$ стремится к $\theta_m = \pi/2$. С ростом γ , при достижении $\gamma \geq \gamma^* \approx 2,74$, величина $D(\gamma, \theta_0)$ становится неотрицательной и максимум скорости боковых шариков соответствует углу $\pi/2$. Отметим, что кривые для $\gamma = 10^5$ и $\gamma = 10^{-5}$, соответствующие ситуациям на рисунках 2,а и 2,б, практически совпадают, за исключением резкого провала при $\theta = \pi/2$ в случае $\gamma = 10^{-5}$, отвечающего «упругому отражению», описанному ранее. Для лучшей видимости кривая $\gamma = 10^5$ показана красными кружками.

Если же в первоначальном условии задачи будет меняться угол θ_0 (рис.5,б), то с его ростом θ_m также увеличивается; при $\theta_0^* = 0,37\pi$ величина $D(\gamma, \theta_0)$ обращается в ноль и максимальная скорость бокового

Рис. 5. Графики нормированной кинетической энергии бокового шарика в зависимости от угла θ при различных значениях параметров γ (а) и θ_0 (б); для лучшей видимости графики для $\theta_0 = \pi/6$ и $\theta_0 = \pi/3$ увеличены в два и десять раз соответственно. Желтым цветом выделены кривые, соответствующие первоначальному варианту задачи

шарика соответствует конфигурации $\theta = \pi/2$ при $\theta_0 \geq \theta_0^* = 0,37\pi$. Также наглядно видно, что графикам с малыми значениями θ_0 соответствует большая величина кинетической энергии боковых шариков, так как кинетическая энергия системы равна убыли потенциальной энергии начальной конфигурации $kq^2/(2l(1/\sin \theta_0 - 1/\sin \theta))$ и уменьшается при увеличении θ_0 . Случай $\theta_0 = \pi/2$ является особым — при нем система находится в состоянии равновесия.

Таким образом, в этой статье не только получено решение обобщенной задачи Иродова, но и сформулирован критерий ($D(\gamma, \theta_0) \leq 0$) того, что при определенных значениях масс шариков и угла при вершине треугольника в начальном положении боковые шарiki проходят линейную конфигурацию с минимальной скоростью.

В заключение, для заинтересовавшихся читателей предлагается такая задача.

Задача для самостоятельного решения

Три одинаковых заряженных шарика, расположенных в вершинах равнобедренного треугольника, соединены друг с другом нерастяжимыми нитями. Нить, соединяющую шарик в основании треугольника, пережгли. В момент времени, когда шарик, движущийся прямолинейно, достиг максимальной скорости, скорости боковых шариков оказались минимальными. В этом состоянии системы кинетическая энергия движения шариков оказалась в $\eta = 2,4$ раза меньше энергии электростатического взаимодействия

шариков. Во сколько раз надо изменить массу центрального шарика, чтобы скорости всех шариков одновременно достигали максимальных значений? (Ответ: $M \geq 10m$.)

Авторы хотели бы поблагодарить студентов Национального исследовательского университета «МИЭТ», участвовавших в обсуждении рассматриваемой задачи в рамках факультативного семинара по физике, а также профессоров Н.И.Боргардта и И.Н.Горбатого за внимательное прочтение рукописи статьи и внесенные замечания.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Подобие с медианами

Д.ШВЕЦОВ

Я не боюсь противника, который один раз тренировал тысячу разных приемов. Я боюсь воина, который тысячу раз тренировал один удар.

Брюс Ли

Основные мотивы

Наша статья посвящена такому простому, но эффективному наблюдению: в подобных треугольниках соответствующие медианы образуют равные углы с соответствующими сторонами (рис.1).

Давайте рассмотрим несколько простых примеров на эту идею.

Рис. 1

Рис. 2

1. В треугольнике ABC $\angle B = 60^\circ$ (рис.2). Внутри треугольника выбрали точку T такую, что $\angle ATB = \angle CTB = 120^\circ$; A_0 , C_0 — середины сторон AB , BC . Докажите, что точки A_0 , T , C_0 , B лежат на одной окружности.

Наивные попытки расписать углы тут не приводят сразу к решению, однако счетом углов легко убедиться, что треугольники ABT и BCT подобны. Действительно, из суммы углов треугольника находим, что $\angle BAT + \angle ABT = 60^\circ = \angle ABT + \angle TBC$, следовательно, $\angle BAT = \angle TBC$. Итак, мы получили пару подобных треугольников ABT и BCT , в которых проведем медианы TA_0 и TC_0 . Тогда медианы в подобных треугольниках ABT и BCT дают нам равные углы: $\angle AA_0T = \angle TC_0B$ (рис.3). Таким образом, в четырехугольнике A_0BC_0T сумма противоположных углов $\angle TA_0B$ и $\angle TC_0B$ составляет 180° , поэтому точки A_0 , T , C_0 , B лежат на одной окружности.