Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Швецов, Подobie с медианами, *Квант*, 2021, номер 7, 42–47

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20210705>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 15:20:45

Задача для самостоятельного решения

Три одинаковых заряженных шарика, расположенных в вершинах равнобедренного треугольника, соединены друг с другом нерастяжимыми нитями. Нить, соединяющую шарик в основании треугольника, пережгли. В момент времени, когда шарик, движущийся прямолинейно, достиг максимальной скорости, скорости боковых шариков оказались минимальными. В этом состоянии системы кинетическая энергия движения шариков оказалась в $\eta = 2,4$ раза меньше энергии электростатического взаимодействия

шариков. Во сколько раз надо изменить массу центрального шарика, чтобы скорости всех шариков одновременно достигали максимальных значений? (Ответ: $M \geq 10m$.)

Авторы хотели бы поблагодарить студентов Национального исследовательского университета «МИЭТ», участвовавших в обсуждении рассматриваемой задачи в рамках факультативного семинара по физике, а также профессоров Н.И.Боргардта и И.Н.Горбатого за внимательное прочтение рукописи статьи и внесенные замечания.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Подобие с медианами

Д.ШВЕЦОВ

Я не боюсь противника, который один раз тренировал тысячу разных приемов. Я боюсь воина, который тысячу раз тренировал один удар.

Брюс Ли

Основные мотивы

Наша статья посвящена такому простому, но эффективному наблюдению: в подобных треугольниках соответствующие медианы образуют равные углы с соответствующими сторонами (рис.1).

Давайте рассмотрим несколько простых примеров на эту идею.

Рис. 1

Рис. 2

1. В треугольнике ABC $\angle B = 60^\circ$ (рис.2). Внутри треугольника выбрали точку T такую, что $\angle ATB = \angle CTB = 120^\circ$; A_0 , C_0 — середины сторон AB , BC . Докажите, что точки A_0 , T , C_0 , B лежат на одной окружности.

Наивные попытки расписать углы тут не приводят сразу к решению, однако счетом углов легко убедиться, что треугольники ABT и BCT подобны. Действительно, из суммы углов треугольника находим, что $\angle BAT + \angle ABT = 60^\circ = \angle ABT + \angle TBC$, следовательно, $\angle BAT = \angle TBC$. Итак, мы получили пару подобных треугольников ABT и BCT , в которых проведем медианы TA_0 и TC_0 . Тогда медианы в подобных треугольниках ABT и BCT дают нам равные углы: $\angle AA_0T = \angle TC_0B$ (рис.3). Таким образом, в четырехугольнике A_0BC_0T сумма противоположных углов $\angle TA_0B$ и $\angle TC_0B$ составляет 180° , поэтому точки A_0 , T , C_0 , B лежат на одной окружности.

Рис. 3

Еще один пример.

2. В прямоугольнике $ABCD$ опущен перпендикуляр BH на диагональ AC (рис.4). Точки M и N — середины отрезков AH и CD соответственно. Докажите, что угол BMN прямой.

В четырехугольнике $BCNM$ угол C равен 90° , и нас просят доказать то же про противоположный ему угол BMN . Другими словами, нам нужно показать, что четырехугольник $BCNM$ вписанный (рис.5). А это, в свою очередь, можно сделать, доказав равенство углов BMC и BNC .

Теперь заметим, что BM является медианой в прямоугольном треугольнике ABH , а отрезок BN — медианой в прямоугольном треугольнике BCD (рис.6). Но прямоугольные треугольники ABH и DBC подобны, потому что острые углы ABC и BDC равны.

Тем самым мы показали, что углы BMH и BNC равны, что и завершает доказательство.

Рис. 4

Рис. 5

Рис. 6

Секреты олимпиадной кухни

Примеры выше показывают, что рассмотрение медиан в подобных треугольниках может быть очень плодотворным. Более того, можно даже самому придумывать «новые» задачи, если только слегка спрятать подобие. Рассмотрим такую классическую конструкцию: в треугольнике ABC провели высоты AA_1 и CC_1 ; точки M и N — середины отрезков AC и A_1C_1 соответственно (рис.7).

Напомним, что $C_1M = \frac{1}{2}AC = A_1M$ как медианы в прямоугольных треугольниках, проведенные к гипотенузе. Следовательно, треугольник A_1MC_1 равнобедренный и отрезок MN является в нем не только медианой, но и высотой: $MN \perp A_1C_1$ (рис.8).

Теперь давайте, используя перпендикулярность отрезков MN и A_1C_1 , попробуем

Рис. 7

Рис. 8

придумать «новую» задачу. В конструкции имеется пара подобных треугольников ABC и A_1BC_1 (почему?), поэтому медианы BM и BN дадут нам равные углы: $\angle A_1NB = \angle AMB$ (рис.9).

Равенство углов AMB и BNA_1 дает вписанность четырехугольника M_1NN_1M , где M_1 — точка пересечения прямых BM и A_1C_1 , а N_1 — прямых BN и AC (рис.10).

С другой стороны, мы уже выяснили, что угол M_1NM прямой, поэтому и угол M_1N_1M тоже прямой. Тем самым, мы придумали такую новую задачу:

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1 ; точки M , N — середины отрезков AC и A_1C_1 соответственно. Прямые A_1C_1 и BM пересекаются в точке M_1 , а прямые BN и AC — в точке N_1 . Докажите, что $M_1N_1 \perp AC$.

Давайте продолжим. В конструкции с высотами есть еще одна пара подобных треугольников — треугольники AHC и A_1HC_1 , где точка H — ортоцентр треугольника ABC (рис.11).

Тут медианы HM и HN в подобных треугольниках AHC и A_1HC_1 дают нам равенство углов HMC и HNA_1 . Обозначим эти равные углы через α , тогда $\angle MNH = 90^\circ - \alpha$. С другой стороны, угол такой же величины $90^\circ - \alpha$ имеется в треугольнике MHB_1 , где B_1 — основание высоты треугольника ABC , т.е. $\angle MNH = \angle MHB_1$ (рис.12).

Равенство этих углов можно переформулировать таким образом:

4. В треугольнике ABC высоты AA_1 и CC_1 пересекаются в точке H . Точки M и N — середины отрезков AC и A_1C_1 соответственно. Докажите, что прямая BB_1 касается описанной окружности треугольника NHM .

Напомним про эту конструкцию еще и такой факт: прямые MC_1 и MA_1 являются касательными к описанной окружности треугольника A_1BC_1 (рис.13).

С другой стороны, треугольники ABC и A_1BC_1 подобны, а отрезки BM и BN — медианы в них, что дает нам равенство углов ABM и A_1BN . Теперь, если отбросить все лишнее, то мы доказали основное свойство — определение симедианы:

Рис. 13

Рис. 14

5. Касательные, проведенные в вершинах A и C к описанной окружности треугольника ABC , пересекаются в точке P . Тогда прямая BP симметрична медиане BM относительно биссектрисы угла ABC (рис. 14).

Прямую BP и называют симедианой треугольника. О многих интересных свойствах симедианы можно прочитать в замечательных статьях [1], [2].

Трудный пример

Под занавес давайте рассмотрим такую непростую задачу с Всероссийской олимпиады, в которой переплетается сразу несколько классических сюжетов:

6. В треугольнике ABC ($AB < BC$) точка I — центр вписанной окружности, M — середина стороны AC , N — середина дуги ABC описанной окружности (рис. 15). Докажите, что $\angle IMA = \angle INB$.

Медиана IM треугольника AIC видна сразу. А как быть с отрезком IN ? В каком треугольнике отрезок IN мог бы быть медианой? Намекнуть на нужное направление поиска может тот факт, что BN является внешней биссектрисой угла B треугольника ABC , ведь точка N — середина дуги ABC . Поэтому давайте дополним рисунок центра-

Рис. 15

Рис. 16

ми внеписанных окружностей треугольника ABC — точками I_a, I_b, I_c (рис. 16).

Тогда точки A, B и C в треугольнике $I_a I_b I_c$ являются основаниями высот (почему?). Следовательно, описанная окружность треугольника ABC в треугольнике $I_a I_b I_c$ проходит через основания высот, т.е. является окружностью девяти точек этого треугольника. Как известно, окружность девяти точек проходит и через середины сторон треугольника. Откуда заключаем, что точка N является серединой отрезка $I_a I_c$. Теперь у нас возникают два подобных треугольника AIC и $I_a I_b I_c$, медианы IM и IN которых и дают желаемое равенство углов.

Прочитав решение выше, читатель, скорее всего, справедливо возмутится: «Как до такого решения можно было догадаться?» На это заметим, что данная задача, трудная сама по себе, послужила толчком к созданию отдельного эффектного и эффективного метода решения задач, которому посвящена увлекательная статья [3].

Упражнения

В качестве первого упражнения приглашаем читателя проследить «решение» одной из самых красивых задач элементарной геометрии нашим методом.

1 (задача о бабочке). Через середину M хорды PQ окружности провели две произвольные хорды AB и CD (рис. 17). Отрезки PM и AC пересе-

Рис. 17

каются в точке E , а отрезки BD и MQ – в точке F . Докажите, что $EM = MF$.

Доказательство в духе древних греков приведено на рисунках 18–20. Эстетическая глубина этой задачи заставляет искать все новые и новые

Рис. 18

Рис. 19

Рис. 20

решения. Большую коллекцию различных доказательств, заворачивающие вариации и обобщения содержатся в замечательной статье [4], которая рекомендуется к прочтению всем любителям геометрии!

2. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$ (рис. 21). Продолжения его противоположных сторон пересекаются в точках P и Q . Пусть K и N – середины диагоналей. Докажите, что сумма углов PKQ и PNQ равна 180° .

3. Касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC пересекает продолжение стороны BC за точку B в точке K (рис. 22); L – середина AC , а точка M – середина отрезка AB . Докажите, что $\angle AKM = \angle CKL$.

4. В равнобедренном треугольнике ABC из середины H основания BC опущен перпендикуляр HE на боковую сторону AC (рис. 23); M – середина отрезка HE . Докажите, что прямые AM и BE перпендикулярны.

5. Дан треугольник ABC (рис. 24). Обозначим через M середину стороны AC , а через P – середину отрезка CM . Описанная окружность треугольника ABP пересекает сторону BC во внутренней точке Q . Докажите, что $\angle ABM = \angle MQP$.

Рис. 21

Рис. 22

Рис. 23

Рис. 24

Рис. 25

Рис. 26

Рис. 27

Рис. 28

Рис. 29

6. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$ (рис.25). Противоположные стороны AB и CD при продолжении пересекаются в точке P , стороны BC и AD – в точке Q . Докажите, что биссектрисы углов BPC и BQA пересекаются на прямой, проходящей через середины AC и BD .

7. Прямая l перпендикулярна одной из медиан треугольника (рис.26). Серединные перпендикуляры к сторонам этого треугольника пересекают прямую l в трех точках. Докажите, что одна из них является серединой отрезка, образованного двумя оставшимися.

8. Пусть M – середина стороны BC остроугольного треугольника ABC ; точка O – центр описанной окружности (рис.27); P и Q – основания перпендикуляров, опущенных из точки M на стороны AC и AB . Докажите, что медиана ML треугольника PMQ параллельна прямой AO .

9. В окружность Ω вписан остроугольный треугольник ABC , в котором $AB > BC$ (рис.28). Пусть P и Q – середины меньшей и большей дуг AC окружности Ω соответственно, а M – основание перпендикуляра, опущенного из точки Q на отрезок AB . Докажите, что окружность, описанная около треугольника BMC , делит пополам отрезок BP .

10. Пусть P – произвольная точка описанной окружности треугольника ABC , точки X и Y – проекции точки P на прямые AB и AC , а точки N , M – середины отрезков XY и BC соответственно (рис.29). Докажите, что $\angle PNM = 90^\circ$.

Закключение

В статье мы обсудили трудные задачи, придумали несколько новых – и все это на базе одного приема, в основе которого лежит идея *преобразования подобия*. Об этом (и многом другом!) можно прочитать в замечательной книге И. М. Яглома «Геометрические преобразования» [6].

Литература

1. Ю.Блинов. Симедиана. – «Квант», 2015, №2.
2. А.Карлюченко, Г.Филипповский. О касательных, проведенных в двух вершинах треугольника. – https://geometry.ru/articles/symmedian_f_k.pdf
3. А.Полянский. Из пушки по воробьям. – «Квант», 2012, №2.
4. В.Протасов. О двух велосипедистах и вишневой косточке. – «Квант», 2008, №8.
5. А.Спивак. Десять бабочек. – https://geometry.ru/articles/spivak_butterfly.pdf
6. И.Яглом. Геометрические преобразования. Том 1. – <https://math.ru/lib/bib-mat-kr/7>