Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Королёв, Теория чисел в работах Чебышёва, *Квант*, 2021, номер 8, 2–9

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20210801>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:45:17

Теория чисел в работах Чебышёва

М.КОРОЛЕВ

ХАРАКТЕРНОЙ ЧЕРТОЙ МНОГИХ великих математиков прошлого была их лаконичность. Число написанных ими работ могло быть небольшим, но каждая из них оказывалась настоящей сокровищницей идей, открывала новые направления в науке и обеспечивала широкое поле деятельности многим поколениям исследователей. К числу таких ученых принадлежит наш выдающийся соотечественник Пафнутий Львович Чебышёв (1821–1894). В этом очерке мы расскажем о его вкладе в один из красивейших разделов математики – теорию чисел.

Функция, считающая простые числа

Важнейшим объектом в теории чисел была и остается функция $\pi(x)$, равная количеству простых чисел, не превосходящих x .¹ Теорема Евклида о том, что множество простых бесконечно, означает, что эта функция неограниченно возрастает с ростом x . Но вот вопрос: с какой скоростью она это делает?

Идея, лежащая в основе решета Эратосфена², позволила Адриену Мари Лежандру (1752–1833) в конце XVIII столетия доказать, что отношение $\pi(x)/x$ с ростом x приближается к нулю. Это означает, на-

пример, что простые числа встречаются в натуральном ряду гораздо реже, чем члены любой арифметической прогрессии. Но функций с таким свойством много. Какую следует предпочесть? Изучая таблицу простых чисел, не превосходящих миллиона, Лежандр заметил, что в ее пределах поведение $\pi(x)$ хорошо описывается приближенной формулой

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x - \alpha}, \text{ где } \alpha = 1,08366. \quad (1)$$

Как выяснилось позже, значение постоянной α нуждается в небольшой поправке. Тем не менее, скорость роста $\pi(x)$ была угадана верно. Еще более точное предположение высказал «король математиков» Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) в 1849 году в письме к немецкому астроному Иоганну Францу Энке (1791–1865), но это письмо долгое время не было известно научной общественности.

Этим, собственно, и ограничивались все наши знания о $\pi(x)$ до появления работ Чебышёва. Функция, считающая простые числа, не спешила раскрывать свои тайны.

Что мы знаем о $\pi(x)$ сейчас?

Чтобы рассказать о вкладе Чебышёва в изучение простых чисел, нам придется немного забежать вперед и сперва рассказать о том, что известно о $\pi(x)$ сейчас. Оказывается, очень точным приближением к $\pi(x)$ служит специальная функция $\text{Li}(x)$, которая называется *интегральным логарифмом* x (читается: «ли от икс»; рис.1). Слово «специальная» отражает здесь тот факт, что функция $\text{Li}(x)$ не может быть выражена в виде конечной комбинации элементарных функций: многочленов, логарифмов, экспонент и радикалов. Однако составить представление о

¹ О простых числах, $\pi(x)$ и упомянутых далее функциях $\psi(x)$, $\Lambda(n)$, о дзета-функции Римана и ее нулях рассказывается в статье автора «Обманчивая простота простых чисел» («Квант» № 3 за 2020 г.).

² О решете Эратосфена и некоторых его свойствах можно прочитать, например, в статьях А.Бендукидзе «О простых числах» («Квант» № 4 за 1973 г.) и А.Колмогорова «Решето Эратосфена» («Квант» № 1 за 1974 г.).

Рис. 1

том, как ведет себя этот загадочный интегральный логарифм, все-таки можно.

Представим себе, что число x достаточно велико. Тогда «первым приближением» к $\text{Li}(x)$ служит дробь $x/\ln x$, а погрешность такого приближения

$$r_1(x) = \text{Li}(x) - \frac{x}{\ln x}$$

оценивается по модулю величиной $c_1 x / (\ln x)^2$, где $c_1 > 0$ – некоторая постоянная. Можно указать «второе», «третье» и дальнейшие приближения:

$$\text{Li}(x) = \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{(\ln x)^2} + r_2(x),$$

$$|r_2(x)| \leq \frac{c_2 x}{(\ln x)^3},$$

$$\text{Li}(x) = \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{(\ln x)^2} + \frac{2x}{(\ln x)^3} + r_3(x),$$

$$|r_3(x)| \leq \frac{c_3 x}{(\ln x)^4},$$

...

$$\text{Li}(x) = \frac{x}{\ln x} + \frac{1!x}{(\ln x)^2} + \frac{2!x}{(\ln x)^3} + \dots + \frac{(n-1)!x}{(\ln x)^n} + r_n(x),$$

$$|r_n(x)| \leq \frac{c_n x}{(\ln x)^{n+1}}.$$

Если x очень большое, то второе слагаемое в таких формулах поменьше первого, третье – поменьше второго и так далее.

Предположение Гаусса, собственно, в том и состояло, что $\pi(x)$ с точностью до

Рис. 2

членов меньшего порядка совпадает с $\text{Li}(x)$. Асимптотический закон распределения простых чисел (а.з.р.п.ч.) в современной форме утверждает, что разность $R(x)$ между «счетчиком» простых чисел $\pi(x)$ и интегральным логарифмом при всех достаточно больших x удовлетворяет неравенству

$$|R(x)| \leq x \exp \left(-\frac{(\ln x)^{0.6}}{5(\ln \ln x)^{0.2}} \right).$$

Точность оценки $R(x)$ зависит от наших знаний о местоположении так называемых комплексных нулей дзета-функции Римана. Несложно проверить (сделайте это!), что правая часть этого неравенства при неограниченном возрастании x растет медленнее всякой функции вида $x/(\ln x)^N$, где $N > 1$ – любое заданное число.

Отметим, что простейшая форма а.з.р.п.ч. утверждает, что отношение $\pi(x)$ к величине $x/\ln x$ с ростом x неограниченно приближается к единице. Это означает, что для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ наступит такой момент $x_0(\varepsilon)$, начиная с которого неравенства

$$(1 - \varepsilon) \frac{x}{\ln x} < \pi(x) < (1 + \varepsilon) \frac{x}{\ln x} \quad (2)$$

будут выполняться для всех x без исключений (рис.2).

Два мемуара о простых числах

Мировую известность Чебышёву принесли два его «мемуара» (так принято было называть тогда научные статьи): «Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины» (1848)

и «О простых числах» (1850). В первом было установлено следующее замечательное свойство функции $\pi(x)$. Оказывается, невозможно подобрать положительные постоянные N и ε так, чтобы график функции $y = \pi(x)$ при всех достаточно больших x лежал либо целиком над графиком функции

$$y_1(x) = \text{Li}(x) + \frac{\varepsilon x}{(\ln x)^N},$$

либо целиком под графиком функции

$$y_2(x) = \text{Li}(x) - \frac{\varepsilon x}{(\ln x)^N}.$$

Иначе говоря, график $y = \pi(x)$ время от времени обязан «возвращаться» в показанную на рисунке 3 полосу. Конечно, это

Рис. 3

еще не а.з.р.п.ч.: справедливость последнего означает, что график $y = \pi(x)$ рано или поздно войдет в любую такую полосу и уже никогда из нее «не вырвется». Но это утверждение позволило Чебышёву строго доказать, что если предел отношения $\pi(x)$ к $x/\ln x$ все-таки существует³, то он обязательно равен единице. Кроме того, из результатов первого мемуара следовало, что предложенная Лежандром формула (1) не может представлять $\pi(x)$ с точностью до слагаемого порядка $x/(\ln x)^3$: для этого значение α в ней следовало бы заме-

нить единицей. Важно подчеркнуть: Чебышёв не смог доказать, что функция

$$y(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$$

аппроксимирует $\pi(x)$ с указанной точностью, т.е. что

$$|\pi(x) - y(x)| \leq \frac{cx}{(\ln x)^3}$$

для некоторой положительной постоянной c , но доказал, что если бы такая аппроксимация существовала, то она совпадала бы с $y(x)$.

Во втором мемуаре Чебышёв нашел границы для $\pi(x)$, подобные (2), но менее точные:

$$(a - \varepsilon) \frac{x}{\ln x} < \pi(x) < (b + \varepsilon) \frac{x}{\ln x},$$

где $a = 0,92129202\dots$ и

$$b = 1,10555042\dots, \quad (3)$$

в которых $\varepsilon > 0$ – сколь угодно маленькая константа, а $x \geq x_0(\varepsilon)$. Ниже мы докажем неравенства (3), правда, в несколько менее точной форме. Основная идея доказательства состоит в том, чтобы связать поведение одной хорошо известной функции $T(x)$ с введенной Чебышёвым функцией $\psi(x)$, которая как раз и отвечает за распределение простых чисел. Последняя с тех пор получила название функции Чебышёва.

Доказательство теоремы Чебышёва

Для положительного x функция Чебышёва $\psi(x)$ определяется как сумма по всем натуральным $n \leq x$ значений величины $\Lambda(n)$, равной $\ln p$, если n есть степень простого числа p , и равной нулю в противном случае:

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \quad (4)$$

(если $0 < x < 2$, то $\psi(x)$ тождественно равна нулю). О роли, которую играют величины $\psi(x)$ и $\Lambda(n)$ в исследовании простых чисел, рассказывается в уже упоминавшейся статье автора. В ней же было уста-

³ Именно существование такого предела и оставалось главной трудностью в доказательстве а.з.р.п.ч., которую с успехом независимо друг от друга преодолели в 1896 году Жак Саломон Адамар (1865–1963) и Шарль Жан де ла Валле Пуссен (1866–1962).

новлено одно очень полезное свойство $\Lambda(n)$. Оказывается, при любом n выполняется тождество

$$\ln n = \sum_{d|n} \Lambda(d), \quad (5)$$

где символ $d|n$ означает сумму по всем делителям числа n .

Следуя Чебышёву, для $x \geq 2$ обозначим через $T(x)$ сумму логарифмов всех натуральных чисел, не превосходящих x :

$$T(x) = \sum_{n \leq x} \ln n. \quad (6)$$

Пользуясь тождеством (5), преобразуем $T(x)$. Прежде всего,

$$T(x) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \Lambda(d).$$

Напомним, что запись $d|n$ означает, что $n = dm$, где m – целое число. Переходя к суммированию по m и d , получим

$$T(x) = \sum_{dm \leq x} \Lambda(d) = \sum_{m \leq x} \sum_{d \leq x/m} \Lambda(d).$$

Зафиксируем какое-нибудь m во внешней сумме и приглядимся повнимательней к сумме по переменной d : да ведь это значение функции Чебышёва в точке x/m . Итак, нами доказано тождество

$$T(x) = \sum_{m \leq x} \psi\left(\frac{x}{m}\right) = \psi(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) + \psi\left(\frac{x}{4}\right) + \dots \quad (7)$$

Таким образом, величину $T(x)$ можно восстановить по значениям ψ -функции в точках x/m , $m = 1, 2, 3, 4, \dots$. Вот если бы удалось сделать обратное – выразить ψ -функцию через $T(x)$, хотя бы приближенно... Именно это и проделал Чебышёв.

Рассмотрим выражение

$$Q(x) = T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right).$$

Заменяя в правой части каждое из слагаемых по формуле (7), получим

$$Q(x) = \psi(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) + \psi\left(\frac{x}{4}\right) + \psi\left(\frac{x}{5}\right) + \dots - 2\psi\left(\frac{x}{2}\right) - 2\psi\left(\frac{x}{4}\right) - 2\psi\left(\frac{x}{6}\right) - \dots =$$

$$= \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) - \psi\left(\frac{x}{4}\right) + \psi\left(\frac{x}{5}\right) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) + \dots$$

Сгруппируем члены в правой части так: второй с третьим, четвертый с пятым и т.д.:

$$Q(x) = \psi(x) - \left(\psi\left(\frac{x}{2}\right) - \psi\left(\frac{x}{3}\right)\right) - \left(\psi\left(\frac{x}{4}\right) - \psi\left(\frac{x}{5}\right)\right) - \dots$$

Однако ψ – неубывающая функция. Значит, каждое из выражений в скобках неотрицательно. Отсюда заключаем

$$\psi(x) \geq Q(x). \quad (8)$$

Иная группировка слагаемых приводит нас к такому неравенству:

$$Q(x) = \left(\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \left(\psi\left(\frac{x}{3}\right) - \psi\left(\frac{x}{4}\right)\right) + \dots \geq \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right). \quad (9)$$

Соотношения (8) и (9) играют в доказательстве теоремы Чебышёва ключевую роль.

Теперь настало время познакомиться поближе с функцией $T(x)$.

Пусть $x \geq 2$, а N – целая часть x , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x , так что $N \leq x < N + 1$. Тогда в сумме $T(x)$ легко опознать логарифм факториала:

$$T(x) = \sum_{n=1}^N \ln n = \ln(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot N) = \ln(N!).$$

Но для числа $N!$ имеются весьма точные двусторонние неравенства⁴

⁴ Иногда эти неравенства заменяют одним соотношением

$$N! = \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N e^{\frac{\theta}{12N}}, \text{ где } 0 < \theta < 1,$$

которое называется формулой Стирлинга в честь шотландского математика Джеймса Стирлинга (1692–1770). Ее доказательство не так просто, и мы его не приводим. О числе « e », входящем в эту формулу, читатель сможет узнать из статьи Е.Кузьмина, А.Ширшова «О числе e » («Квант» № 8 за 1979 г.).

$$\sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N < N! < \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N e^{\frac{1}{12N}},$$

логарифмируя которые, получим оценки для $T(x)$:

$$N \ln N - N + \frac{1}{2} \ln N + \frac{1}{2} \ln 2\pi < T(x) < \\ < N \ln N - N + \frac{1}{2} \ln N + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{12N}.$$

Можно показать, что функция $f(n) = u \ln u - u + \frac{1}{2} \ln u$ монотонно возрастает при $u \geq 1$. Поэтому, заменяя N на x и немного огрубляя получившуюся оценку, будем иметь:

$$T(x) < x \ln x - x + \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{24} < \\ < x \ln x - x + \frac{1}{2} \ln x + 1. \quad (10)$$

Заметим теперь, что

$$\ln(x-1) > \ln x - \frac{2}{x}. \quad (11)$$

Действительно, (11) равносильно неравенству $(1-1/x)^x > e^{-2}$, которое подстановкой $x = 1+t$ сводится к неравенству $(1+1/t)^{1+t} < e^2$. Последнее же легко следует из соотношения $(1+1/t)^t < e$.⁵ Поэтому, оценивая $T(x)$ снизу с помощью (11), найдем

$$T(x) > (x-1) \ln(x-1) - (x-1) + \frac{1}{2} \ln(x-1) + \\ + \frac{1}{2} \ln 2\pi > x \left(\ln x - \frac{2}{x} \right) - x - \frac{2}{x} \ln(x-1) + 1 > \\ > x \ln x - x - \frac{1}{2} x - 1. \quad (12)$$

Из (10) и (12) уже нетрудно вывести (сделайте это самостоятельно) неравенства

$$x \ln 2 - 5 \ln x < Q(x) < x \ln 2 + 5 \ln x, \quad (13)$$

которые справедливы при всех $x \geq 2$.

⁵ Согласно одному из возможных определений, число e – предел последовательности $a_n = (1+1/n)^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, монотонное возрастание которой можно доказать «школьными» средствами. Монотонное возрастание функции $(1+1/t)^t$ при $t > 0$ является менее очевидным фактом и потому приводится здесь без доказательства.

Из (9) и (13) находим

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) < x \ln 2 + 5 \ln x.$$

Заменим в этом неравенстве величину x последовательно на $x/2$, $x/4$, $x/8, \dots$ и выпишем получившиеся соотношения в столбик:

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) < x \ln 2 + 5 \ln x,$$

$$\psi\left(\frac{x}{2}\right) - \psi\left(\frac{x}{2^2}\right) < \frac{x}{2} \ln 2 + 5 \ln \frac{x}{2},$$

$$\psi\left(\frac{x}{2^2}\right) - \psi\left(\frac{x}{2^3}\right) < \frac{x}{2^2} \ln 2 + 5 \ln \frac{x}{2^2},$$

...

$$\psi\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - \psi\left(\frac{x}{2^k}\right) < \frac{x}{2^{k-1}} \ln 2 + 5 \ln \frac{x}{2^{k-1}}.$$

Номер k шага, на котором следует остановиться, определим из условий $1 \leq x/2^k < 2$, так что $k \leq \log_2 x$. Сложив неравенства почленно и пользуясь тем, что $\psi(x/2^k) = 0$, найдем

$$\psi(x) < x \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} \right) \ln 2 + \\ + 5k \ln x < 2(\ln 2)x + 8(\ln x)^2.$$

Итак, для любого $x \geq 2$ функция Чебышёва удовлетворяет неравенствам

$$x \ln 2 - 5 \ln x < \psi(x) < 2(\ln 2)x + 8(\ln x)^2.$$

Все, что нам осталось, – перейти от $\psi(x)$ к $\pi(x)$. Но это делается с помощью тех рассуждений, что применялись при решении задачи 3 к предыдущей статье автора.⁶ Так, для заданного $\varepsilon > 0$ и всех $x \geq x_0(\varepsilon)$ найдем:

$$(\ln 2 - \varepsilon) \frac{x}{\ln x} < \pi(x) < (2 \ln 2 + \varepsilon) \frac{x}{\ln x}.$$

Почему найденные нами границы для $\pi(x)$ уступают по точности неравенствам (3)? Дело в том, что сам Чебышёв в качестве $Q(x)$ рассматривал более сложную комбинацию величин $T(x)$, а именно

$$T(x) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right) + T\left(\frac{x}{30}\right).$$

⁶ См. «Квант», 2020, № 3, с. 57.

Поэтому получившиеся у него значения постоянных оказались равными⁷

$$a = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{3} \ln 3 + \frac{1}{5} \ln 5 - \frac{1}{30} \ln 30$$

$$\text{и } b = \frac{6}{5} a.$$

В 1881 году американский математик Джеймс Джозеф Сильвестр (1814–1897) путем довольно тонких и сложных вычислений, в основе которых лежал метод Чебышёва, доказал неравенства (3) с постоянными $a = 0,956\dots$ и $b = 1,045\dots$. Вероятно, отчаявшись вывести а.з.р.п.ч. с помощью рассуждений такого рода, Сильвестр закончил свою статью словами: «...по-видимому, нам придется ждать рождения на свет такого человека, который бы настолько превосходил Чебышёва в проницательности и прозорливости, насколько сам Чебышёв превосходил в этих качествах обычный человеческий уровень». Спустя полтора десятка лет асимптотический закон был доказан, причем ключевую роль в этом сыграли дзета-функция Римана и ее нули. Но интерес к «элементарным» методам (т.е. не использующим средств теории функций комплексного переменного) исследования $\pi(x)$ не иссяк. Просто теперь движущей силой стал поиск элементарного доказательства а.з.р.п.ч. Этот поиск увенчался успехом в 1948 году, когда Атле Сельберг (1917–2007) первым нашел такое доказательство. Сейчас элементарные методы занимают весьма важное место в арсенале современной теории чисел.

Простые числа в последовательности «сдвинутых квадратов»

Что общего у простых чисел ряда

$$2, 5, 17, 37, 101, 197, \dots? \quad (14)$$

Приглядевшись к ним, можно увидеть, что все они – квадраты, «сдвинутые» на еди-

ницу вправо:

$$2 = 1^2 + 1, \quad 5 = 2^2 + 1, \quad 17 = 4^2 + 1, \quad 37 = 6^2 + 1,$$

$$101 = 10^2 + 1, \quad 197 = 14^2 + 1 \text{ и т.д.}$$

Конечна или нет эта последовательность? По-видимому, да, но точный ответ на этот вопрос не получен до сих пор.⁸

Если какая-то задача долго не поддается решению, то имеет смысл немного «пошевелить» ее условие и рассмотреть близкую к ней, но более простую задачу. В нашем случае можно пойти по пути, который наметил Чебышёв.

Рассмотрим произведение

$$P(N) = \prod_{n \leq N} (n^2 + 1)$$

и обозначим через $H(N)$ его наибольший простой делитель. Если последовательность (14) все же бесконечна, то ясно, что для бесконечного множества значений N будет выполнено неравенство $H(N) = N^2 + 1 > N^2$.

Можно ли что-то сказать о величине $H(N)$ без каких-либо предположений о последовательности (14)? Оказывается, можно. И первым, кому это удалось, стал Чебышёв. После его кончины среди бумаг был обнаружен листок с наброском доказательства того факта, что отношение $H(N)/N$ неограниченно возрастает с ростом N (фактически, из рассуждений Чебышёва следовала оценка вида $H(N) \geq cN \ln N$, где $c > 0$ – постоянная). Восстановленное Андреем Андреевичем Марковым (1856–1922) полное доказательство этого утверждения было опубликовано в 1895 году.

Спустя некоторое время эта задача привлекла внимание ученых. Ею занимались Иван Иванович Иванов (1862–1939), Пал Эрдёш (1913–1996), Тригве Нагелл (1895–1988) и Кристофер Хооли (1928–2018), которому принадлежит первая (1967) оценка вида $H(N) \geq N^{1+\beta-\epsilon} \ln N$ с $\beta = 0,1$ (здесь ϵ – сколь угодно малое положительное

⁷ Более подробно с выкладками можно ознакомиться по статье М. Башмакова «О постулате Бертрана» («Квант» № 5 за 1971 г.) или же по оригинальной работе П.Л. Чебышёва (Полное собрание сочинений П.Л. Чебышёва. Том I. Теория чисел. – М.-Л., Изд-во АН СССР, 1946. – С.191–208).

⁸ Составлена таблица всех простых чисел такого вида, не превосходящих 10^{20} . Наибольшее из них – простое число $p = (2k)^2 + 1$, где $k = 4999999978$.

число). Результат Хооли впоследствии неоднократно уточнялся: $\beta = 0,202468\dots$ (Ж.-М.Дезуйе и Х.Иванец, 1982), $\beta = 0,2182\dots$ (Р. де ла Бретеш и С.Драпье, 2019), $\beta = 0,279\dots$ (Й.Мерикоски, 2019).

«Чебышёвское смещение»

Какие остатки дают простые числа при делении на 4? Если не брать в расчет двойку – единственное четное простое число, то такими остатками будут единица и тройка. Иначе говоря, все нечетные простые числа содержатся в двух арифметических прогрессиях: $4n + 1$ и $4n + 3$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. Бесконечно или нет множество простых в каждой из них? Утвердительный ответ на этот вопрос дал еще в 1838 году Петер Густав Лежен Дирихле (1805–1859).

Более того, этот факт верен для всякой арифметической прогрессии $qn + a$, $n = 0, 1, 2, \dots$, первый член и разность которой взаимно просты: $(q, a) = 1$. Количество таких прогрессий, отвечающих одной и той же разности q , совпадает со значением $\varphi(q)$ функции Эйлера.⁹ Оказывается, что простые числа распределены по таким прогрессиям более-менее равномерно. Если обозначить через $\pi(x; q, a)$ количество простых p , не превосходящих x и имеющих вид $p = qn + a$, то в «первом приближении» эта величина ведет себя как $\pi(x)/\varphi(q)$. В частности,

$$\pi(x; 4, 1) \approx \frac{\pi(x)}{2} \text{ и } \pi(x; 4, 3) \approx \frac{\pi(x)}{2}.$$

Однако Чебышёв, исследуя поведение бесконечной суммы

$$\sum_{\substack{p \geq 3 \\ p - \text{ простое}}} (-1)^{(p+1)/2} e^{-px}$$

при положительном x , стремящемся к нулю, заметил, что простых вида $4n + 3$ как будто бы все же «побольше», чем простых вида $4n + 1$.

⁹ О функции Эйлера и ее свойствах можно узнать из статей С.Гиндикина «Малая теорема Ферма» («Квант» № 10 за 1972 г.) и А.Кириллова «О правильных многоугольниках, функции Эйлера и числах Ферма» («Квант» № 7 за 1977 г. и № 6 за 1994 г.).

Чтобы понять глубинные причины такого «неравноправия» в мире простых чисел, математикам пришлось принять на веру, без доказательства, некоторые утверждения о нулях функций, подобных дзета-функции Римана $\zeta(s)$. Выяснилось, что хотя каждое из неравенств

$$\pi(x; 4, 3) > \pi(x; 4, 1), \quad \pi(x; 4, 1) > \pi(x; 4, 3)$$

может выполняться при сколь угодно больших x , первое выполняется «гораздо чаще».

Что это означает? Для количественной характеристики множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ решений этих неравенств математики придумали способ, суть которого заключается в следующем. Хорошо известна формула

$$\sum_{n \leq N} \frac{1}{n} = \ln N + \rho(N),$$

где $|\rho(N)| \leq 1$ при всех $N \geq 1$. Если переписать ее в виде

$$\frac{1}{\ln N} \sum_{n \leq N} \frac{1}{n} = 1 + \frac{\rho(N)}{\ln N},$$

а затем устремить N к бесконечности, то правая часть будет приближаться к единице. Составим теперь выражения

$$\delta_{\mathcal{A}}(N) = \frac{1}{\ln N} \sum_{n \leq N, n \in \mathcal{A}} \frac{1}{n} \text{ и } \delta_{\mathcal{B}}(N) = \frac{1}{\ln N} \sum_{n \leq N, n \in \mathcal{B}} \frac{1}{n}$$

и станем следить, что будет происходить с ними, когда N неограниченно возрастает. Оказывается, что они приближаются к некоторым положительным величинам $\delta_{\mathcal{A}}$, $\delta_{\mathcal{B}}$, сумма которых равна единице. Эти-то величины и было решено взять в качестве частоты выполнения соответствующих неравенств.¹⁰ Кропотливые подсчеты, предпринятые М.Рубинштейном и П.Сарнаком (1994), показывают, что $\delta_{\mathcal{A}} = 0,9959\dots$, а $\delta_{\mathcal{B}} = 0,0041\dots$

Еще более яркий пример чебышёвского смещения наблюдается в случае прогрессий $3n + 2$ и $3n + 1$. Определяя $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ как множества тех чисел $x > 0$, для которых выполнены, соответственно, неравенства

$$\pi(x; 3, 2) > \pi(x; 3, 1), \quad \pi(x; 3, 1) > \pi(x; 3, 2),$$

будем иметь: $\delta_{\mathcal{A}} = 0,9990\dots$, $\delta_{\mathcal{B}} = 0,0001\dots$

¹⁰ В оригинале вместо суммы по целочисленной переменной n использовался интеграл по «непрерывной» переменной x .

Аналоги этого замечательного явления были обнаружены и в более экзотических ситуациях, уже не связанных напрямую с простыми числами в прогрессиях.

«Теория сравнений» и другие вопросы

Напомним, что два целых числа a и b называются сравнимыми по модулю $m \geq 2$, если их разность делится на m без остатка.¹¹ Этот факт принято записывать в виде $a \equiv b \pmod{m}$. Такие выражения называются сравнениями.

Изучение свойств сравнений и составляет предмет теории, вынесенной в заголовок настоящего раздела. Особое место в этой теории уделяется вопросам разрешимости сравнений вида

$f(x) \equiv 0 \pmod{m}$, где

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

— многочлен с целыми коэффициентами, а x — переменная. Огромный вклад в теорию сравнений внесли Пьер Ферма (1601–1665), Леонард Эйлер (1707–1783), Жозеф Луи Лагранж (1736–1813), уже упоминавшиеся выше К.Ф.Гаусс, А.М.Легандр и другие ученые.

Однако долгое время не существовало курса, который с ясностью и полнотой излагал бы как основы, так и важнейшие достижения этой теории, такие, как, например, закон взаимности квадратичных вычетов. Чебышёв, глубоко изучив труды предшественников, создал такой курс (1848), обогатив теорию чисел многими методологическими находками. К слову, ряд теорем Чебышёва из «Теории сравнений» вошел впоследствии в широко известный учебник Ивана Матвеевича Виноградова (1891–1983) «Основы теории чисел».

В золотой фонд математики вошла и знаменитая теорема Чебышёва (1868) о том, что для любого иррационального числа a и произвольного вещественного числа b существует бесконечное множество пар целых чисел (x, y) , для которых

$$|ax + b - y| < \frac{2}{|x|}.$$

¹¹ О сравнениях можно прочесть в уже упоминавшейся статье С.Гиндикина.

Это утверждение нашло приложения в теории квадратичных форм и геометрии чисел.

Глубоко проанализировав и обобщив тождество Каталана¹²

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n},$$

Чебышёв нашел (1876) представление всякого вещественного числа a в виде бесконечной суммы дробей, знаменателями которых служат последовательные квадраты натуральных чисел:

$$a = \frac{\Delta_1(a)}{1^2} - \frac{\Delta_2(a)}{2^2} + \frac{\Delta_3(a)}{3^2} - \frac{\Delta_4(a)}{4^2} + \dots$$

где

$$\Delta_k(a) = 4[u] + (-1)^k \cdot (-1)^{[2u]}, \quad u = k \frac{6a + \pi^2}{24 \ln 2}.$$

Прочие теоретико-числовые работы Чебышёва посвящены изучению бинарных квадратичных форм вида $x^2 \pm ay^2$, а также задаче обращения бесконечных рядов вида

$$F(x) = f(x) + f(2x) + f(3x) + \dots + f(4x) + f(5x) + \dots,$$

$$F(x) = f(x) - f(2x) + f(3x) - \dots - f(4x) + f(5x) - \dots,$$

$$F(x) = f(x) - f(3x) + f(5x) - \dots - f(7x) + f(9x) + \dots$$

(под обращением понимается выражение функции $f(x)$ через $F(x)$).

Научное наследие Пафнутия Львовича Чебышёва до сих пор не потеряло своей актуальности. «Читайте классиков, в них написано больше, чем в них написано», — призывал выдающийся советский математик Алексей Георгиевич Постников (1921–1995). Эти слова в полной мере можно отнести к работам Чебышёва. Нет сомнения, что они еще долго будут служить источником новых идей и вдохновения для будущих поколений математиков.

¹² Эжен Шарль Каталан (1814–1894) — бельгийский математик.