Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Грибалко, Построение средней линии трапеции, *Квант*, 2021, номер 8, 27–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20210805>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 15:03:15

еще одно дополнительное требование – о том, чтобы хронометр не требовал частых сверок с более точным прибором. Некогда штурман корабля, прибывшего в порт, где была астрономическая обсерватория (а они часто располагались в приморских городах именно по этой причине), собирал все корабельные хронометры, которых, как вы уже знаете, было не менее трех, и вез или нес их в обсерваторию для того, чтобы выставить на них время, основываясь на показаниях более точных астрономических часов.

Я работаю в астрономической обсерватории с 175-летней историей. Под историческим зданием находится сложная система подвалов, из менее глубоких надо спускаться в более глубокие. Один из таких глубоких подвалов называется часовым. Именно в нем в давние времена хранились астрономические часы. Подвал обеспечивал постоянство температуры, а это было залогом постоянства скорости хода часов.

Конечно, изобретатели придумали массу способов компенсации влияния температурного расширения на период колебаний маятника, но лучше не компенсировать что-то, а просто исключить или свести к минимуму. И, естественно, учитывается различие в величине ускорения свободного падения в разных точках, температура в подвалах, разли-

чающаяся в разных обсерваториях, и т.д. Вдобавок точность хода регулярно проверялось при астрономических наблюдениях. Если возникали рассогласования, то причину искали в часах, а не в движениях небесных светил.

Любопытно, что в Великобритании в XIX веке некоторые люди зарабатывали себе на жизнь, продавая информацию о точном времени. Они имели личный хронометр, который регулярно выставляли по часам обсерватории (для Лондона – Гринвичской), и периодически обходили своих клиентов и выставляли их часы, домашние и персональные. Естественно, за некоторую плату. Другие по утрам обходили клиентов и в заданное время стучали в окна длинными шестами, чтобы разбудить их. Сейчас с этим успешно справляется программа-будильник на наших смартфонах, не говоря уже про специальные устройства.

В старых кинофильмах вы можете встретить и сигналы точного времени – «начало сигнала соответствует...», и забытую фразу: «Товарищи / господа офицеры, сверим часы».

Так что увидев точное время на экране компьютера, оцените, как просто нам достается то, что казалось бы чудом всего пару столетий назад.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Построение средней линии трапеции

А.ГРИБАЛКО

На прошедшей недавно XVIII Устной олимпиаде по геометрии предлагалась следующая задача (автор – Ю.Блинков):

Дана трапеция, в которой одно основание в два раза больше другого. С помощью одной линейки (без делений) постройте среднюю линию этой трапеции.

Решение этой задачи можно посмотреть на сайте <https://olympiads.mccme.ru/ustn/>. Возникает естественный вопрос: а возможно ли построение средней линии трапеции с помощью одной линейки при каком-нибудь другом отношении оснований? Давайте посмотрим, какие еще построения, кроме приведенных в решении, можно сделать.

Пусть дана трапеция $ABCD$, в которой основание AD в k раз больше основания BC (рис.1). Сначала, кроме точки пересечения диагоналей, которую мы обозначим O , и точки пересечения прямых, содержащих боковые стороны трапеции, особо строить и нечего. Через них мы можем провести прямую, которая пересечет основания в их серединах (по замечательному свойству трапеции). Пусть точка M – середина основания AD . Теперь уже становится больше возможностей, какие линии можно строить.

Рис. 1

Рассмотрим, например, треугольник ABD . В нем точка O делит сторону BD в отношении $\frac{1}{k}$, считая от вершины B (это следует из подобия треугольников BOC и DOA), а точка M делит сторону AD пополам. Значит, если мы проведем в этом треугольнике чевианы AO (она является частью диагонали AC , поэтому уже построена) и BM , возьмем точку их пересечения O_1 и проведем прямую через точки D и O_1 , то по теореме Чевы она пересечет сторону AB в такой точке B_1 , что $\frac{AB_1}{B_1B} = k$. Примем длину боковой стороны AB за единицу, тогда из полученного соотношения следует, что $AB_1 = \frac{k}{k+1}$.

Теперь рассмотрим треугольник AB_1D . Так как точки M , O_1 и B лежат на одной прямой и при этом принадлежат прямым, содержащим стороны этого треугольника (рис.2), то по теореме Менелая можно найти отношение $\frac{B_1O_1}{O_1D} = \frac{MA}{DM} \cdot \frac{BB_1}{AB} = \frac{1}{k+1}$. Аналогично тому, как мы делали с треугольником ABD , построим точку O_2 — пересечение отрезков AO_1 и B_1M , а затем точку B_2 — пересечение прямой DO_2 и отрезка AB_1 . Опять же по теореме Чевы можно доказать, что $AB_2 = \frac{k+1}{k+2} \cdot AB_1 =$

Рис. 2

$$= \frac{k+1}{k+2} \cdot \frac{k}{k+1} = \frac{k}{k+2}.$$

Уже можно заметить некоторую закономерность и понять, что если мы продолжим такие построения дальше, то будем получать похожие соотношения. Давайте в этом убедимся. Сделаем все те же самые построения в треугольнике AB_2D , в результате получим на стороне AB_2 такую точку B_3 , что $\frac{AB_3}{B_3B_2} = k+2$. Значит, $AB_3 = \frac{k+2}{k+3} \cdot AB_2 = \frac{k+2}{k+3} \cdot \frac{k}{k+2} = \frac{k}{k+3}$. Для следующих точек

мы будем получать такие длины отрезков:

$$AB_4 = \frac{k}{k+4}, \quad AB_5 = \frac{k}{k+5}, \quad \dots, \quad AB_n = \frac{k}{k+n}.$$

Отсюда можно сделать вывод, что если $k = n$, т.е. отношение оснований трапеции равно натуральному числу, то точка B_n будет являться серединой боковой стороны AB . При этом прямая B_nO_{n-1} параллельна AD , поэтому, построив ее, мы получим среднюю линию трапеции (или можно аналогичным способом построить середину стороны CD , а затем и среднюю линию).

Давайте внимательно посмотрим на рисунок и подумаем, что еще мы можем построить. Возьмем, например, точку пересечения прямых DB_1 и BC , обозначим ее E_1 (рис.3). Треугольники E_1B_1B и DB_1A подобны, причем коэффициент их подобия мы уже знаем: $\frac{B_1B}{B_1A} = \frac{1}{k}$. Следовательно, $BE_1 = \frac{1}{k} \cdot AD = BC$. Появляется желание проверить, а какие отрезки будут высекать прямые DB_2 , DB_3 и так далее на прямой BC . Пусть прямые DB_2 и BC пересекаются в точке E_2 , тогда мы можем рассмотреть подобные треугольники E_2B_2B и DB_2A . Так как длина отрезка B_2A равна

Рис. 3

$\frac{k}{k+2}$, то $B_2B = \frac{2}{k+2}$, поэтому коэффициент подобия треугольников равен $\frac{2}{k}$, откуда получаем, что $BE_2 = \frac{2}{k} \cdot AD = 2BC$. Но нам уже

известно, что $BE_1 = BC$, поэтому и $E_1E_2 = BC$.

Аналогично можно доказать, что если прямые $AB_3, AB_4, \dots, AB_n$ пересекают прямую BC в точках $E_3, E_4, \dots, E_n$ соответственно, то $E_2E_3 = E_3E_4 = \dots = E_{n-1}E_n = BC$.

Таким образом, мы можем увеличить основание трапеции в любое натуральное число раз. Это наталкивает на мысль, что, раз мы уже умеем строить среднюю линию трапеции с любым целочисленным отношением оснований, то сможем построить ее и для любого рационального отношения. Действительно, если $k = \frac{p}{q}$, где p и q – натуральные числа,

причем k не является целым числом, то можно увеличить основание BC в p раз (для этого достаточно построить точку E_{p-1}). При этом мы получим трапецию $AE_{p-1}CD$, в которой основание $E_{p-1}C$ в $q > 1$ раз больше основания AD , а для нее мы уже знаем, как построить среднюю линию. Поскольку средние линии новой трапеции и исходной лежат на одной прямой, средняя линия трапеции $ABCD$ будет построена.

Добавим еще, что если $k = 1$, то $ABCD$ будет являться не трапецией, а параллелограммом (рис.4). Для него прямые, содержащие боковые стороны, не пересекаются, поэтому мы не сможем сделать все описанные выше построения. Но, тем не менее, среднюю линию в нем построить довольно легко. Возьмем на стороне CD произвольную точку C' и получим трапецию $ABC'D$, в которой AB будет являться основанием. А для любой трапеции мы уже умеем находить середины оснований, поэтому можем построить середину стороны AB . После этого можно даже

не строить середину стороны CD , а взять точку пересечения диагоналей параллелограмма и провести через полученные две точки среднюю линию.

Итак, мы уже научились строить с помощью одной линейки среднюю линию трапеции (и параллелограмма) с любым рациональным отношением оснований. Но заметим, что мы заранее знали, чему равно это отношение. А что будет, если нам просто сообщат, что отношение оснований трапеции является рациональным числом, но само число будет неизвестно? Давайте договоримся, хоть это и является спорным вопросом, что с помощью линейки мы всегда можем найти точку пересечения двух прямых, если она существует. Это, по сути, позволяет нам узнать, параллельны прямые или нет. Тогда оказывается, что приведенные выше рассуждения можно продолжить и получить решение даже в этом случае. Пусть, как и ранее, отношение оснований трапеции равно не-

которому числу $k = \frac{p}{q}$, где p и q – натураль-

ные числа. Когда нам были известны p и q , мы просто увеличили основание BC в p раз и получили трапецию с целочисленным отношением оснований. Но ведь можно аналогично и основание AD увеличить в q раз. Для этого будем последовательно строить на прямой AD такие точки $F_1, F_2, \dots, F_{q-1}$, что $AF_1 = F_1F_2 = \dots = F_{q-2}F_{q-1} = AD$. Тогда $F_{q-1}D = q \cdot AD = p \cdot BC = E_{p-1}C$, т.е. четырехугольник $F_{q-1}E_{p-1}CD$ является параллелограммом. Теперь становится понятно, что если при построении таких точек на прямых AD и BC мы в какой-то момент получим такие две точки, что прямая, проходящая через них, не пересекает прямую CD , то сможем найти p и q .

Чтобы получить две такие точки, можно воспользоваться простым алгоритмом. Допустим, точка пересечения прямых AB и CD лежит в той же полуплоскости от прямой AD , что и прямая BC (будем говорить, что она выше AD). Тогда мы знаем, что $k > 1$, откуда следует, что $p > q$. В этом случае будем строить точки поочередно на прямых BC и AD , т.е. в таком порядке: E_1, F_1, E_2, F_2 и так далее. Проводя прямые через все построенные точки на прямой AD (в том числе через точку A) и каждую новую точку на прямой BC , мы рано или поздно дойдем

Рис. 4

до точки E_{p-1} , а точка F_{q-1} к этому времени уже будет построена (если $q = 1$, то это будет точка A). В этот момент мы и получим прямую, параллельную CD .

Этот алгоритм можно немного усовершенствовать, чтобы не строить на прямой AD лишние точки и не проводить лишние прямые. Начнем строить на прямой BC точки E_1, E_2 и так далее и будем проводить прямые через точку A и каждую новую точку. Если одна из этих прямых окажется параллельна прямой CD , то цель достигнута. Иначе в какой-то момент эти прямые пересекутся ниже AD . Это будет означать, что отношение оснований очередной трапеции впервые стало меньше 1. Теперь построим точку F_1 и продолжим строить точки на прямой BC , проводя прямые уже через них и F_1 . Опять же будем делать это до тех пор, пока очередная прямая не станет параллельна прямой CD или не пересечется с ней ниже AD . Далее при необходимости построим точку F_2 и будем действовать аналогично, затем F_3 и так далее, пока не дойдем до точки F_{q-1} . После этого через несколько шагов будет построена и точка E_{p-1} . Для реализации такого алгоритма потребуется ровно $p + q - 2$ итерации.

Давайте разберем на примере, как работает этот алгоритм. Пусть дана трапеция $ABCD$, в которой отношение оснований AD и BC равно $\frac{7}{3}$ (хотя пока мы не знаем, чему оно равно на самом деле). Тогда построение будет состоять из следующих шагов (рис.5).

1) На прямой BC строим такую точку E_1 , что $BE_1 = BC$. В полученной трапеции AE_1CD отношение оснований AD и E_1C равно $\frac{7}{6}$.

2) Отношение, полученное на предыдущем шаге, больше 1 (в этом мы убеждаемся, построив точку пересечения прямых AE_1 и CD , — она будет выше AD), поэтому строим

Рис. 5

следующую точку E_2 на прямой BC . В трапеции AE_2CD отношение оснований AD и E_2C равно $\frac{7}{9}$.

3) Прямые AE_2 и CD пересекутся ниже AD , поэтому теперь строим на прямой AD такую точку F_1 , что $AF_1 = AD$. В трапеции F_1E_2CD отношение оснований F_1D и E_2C равно $\frac{14}{9}$.

4) Строим точку E_3 . В трапеции F_1E_3CD отношение оснований F_1D и E_3C равно $\frac{14}{12}$.

5) Строим точку E_4 . В трапеции F_1E_4CD отношение оснований F_1D и E_4C равно $\frac{14}{15}$.

6) Строим точку F_2 . В трапеции F_2E_4CD отношение оснований F_2D и E_4C равно $\frac{21}{15}$.

7) Строим точку E_5 . В трапеции F_2E_5CD отношение оснований F_2D и E_5C равно $\frac{21}{18}$.

8) Строим точку E_6 . Отношение отрезков F_2D и E_6C равно 1, поэтому прямые F_2E_6 и CD не будут иметь пересечения.

Таким образом, за восемь шагов мы получили прямую F_2E_6 , которая параллельна CD , а это означает, что $p = 7$ и $q = 3$, т.е. мы с помощью одной линейки смогли узнать, чему равно отношение оснований исходной трапеции. А дальше мы уже можем воспользоваться либо построением средней линии трапеции с известным отношением оснований, либо построением средней линии параллелограмма F_2E_6CD .

В заключение хотелось бы разобраться с рассмотренными вопросами для трапеций с иррациональным отношением оснований. Понятно, что можно использовать описанные выше построения и получить прямую, сколь угодно близкую к средней линии, однако предложенный метод не позволит построить ее точно. Предлагаем читателям подумать, возможно ли построение в этом случае, и если да, то как именно это сделать.