Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Филипповский, В поисках оптимальных построений (из мемуаров барона Мюнхгаузена), *Квант*, 2021, номер 9, 25–28

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20210904>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 02:40:31

Рис. 3

Рис. 5

Рис. 4

шаре, а на построенной ими ракете. Имя Гак созвучно гайдаровским Чуку и Геку, а откуда Буртик? Предлагаем вам разобраться с этим самостоятельно.

В поисках оптимальных построений

(из мемуаров барона Мюнхгаузена)

ДРУЗЬЯ МОИ, ВЫ, БЕЗУСЛОВНО, слышали о моей любви к геометрии! А в геометрии – к задачам на построение. А в задачах на построение – к построениям наименьшим числом линий. Такие построе-

ния часто называют *оптимальными*. Еще одна моя страсть – это путешествия на Луну! Во время таких путешествий я охотно рассказываю местным жителям о красивых задачах и теоремах геометрии, обучаю их оптимальным построениям.

Так, во время первого путешествия на Луну мы занимались построениями с помощью одной линии. Напомню, что задачи на построение выполняются циркулем и линейкой без делений, а линией называется прямая, луч, отрезок, окружность или ее частичка в виде засечки. Из построений одной линией жителям Луны особенно понравилась такая задача: на прямой l отложен угол, равный α (рис.1), и надо одной линией построить угол, равный данному. Мы вместе

Рис. 1

Рис. 2

с лунянами улыбнулись и выполнили построение (рис.2).

В дальнейшем я тоже буду демонстрировать решения задач либо рисунком, либо ссылаясь на важные факты геометрии, которые жители как Луны, так и Земли должны знать!

Во время моего второго путешествия на Луну мы изучали оптимальные построения уже двумя линиями. В качестве примеров предложу вот такие две задачи.

Задача 1. Дан угол, равный 108° . Двумя линиями постройте угол, составляющий $\frac{1}{3}$ данного угла.

Рис. 3

Решение. Пусть угол с вершиной A равен 108° . Первая линия – окружность с центром в A произвольного радиуса. Она пересекает стороны угла, скажем, в точках B и C (рис.3). Вторая линия – отрезок BC . Так как $\triangle ABC$

равнобедренный, то $\angle B = \angle C = 36^\circ$, что составляет $\frac{1}{3}$ угла 108° .

Задача 2. Приведите пример угла, который можно разделить на три равные части, проведя не более двух линий.

Решение. Это угол, равный 270° (рис.4).

Так вот, друзья мои, совсем недавно я возвратился на Землю после своего третьего путешествия на Луну, где мы, естественно, выполняли оптимальные построения с помощью трех

Рис. 4

линий. Жители Луны покорили меня достойными знаниями и хорошим чувствованием геометрических построений. О задачах, наиболее им приглянувшимся, я поведу дальнейший рассказ.

Задача 3. Дана прямая l . Тремя линиями постройте угол, равный 30° .

Решение. Первая линия: окружность ω любого радиуса с центром O на прямой l . Пусть она пересекает l в точках A и B (рис.5). Вторая линия: засечка из точки B этим же радиусом дает на ω точку C . Третья линия: отрезок AC . Тогда угол CAB равен

Рис. 5

30° , поскольку $BC = R_\omega$, $AB = 2R_\omega$. При этом угол ACB равен 90° , а катет, лежащий против угла... ой-ой-ой, я обещал так много не говорить!

Задача 4. Дан квадрат $ABCD$. Проведя не более трех линий, постройте угол, равный 15° .

Решение. Первые две линии – засечки из вершин A и D радиусом, равным стороне квадрата. Пусть эти засечки пересекаются в точке K (рис.6). Третья линия – отрезок BK . Тогда $\angle KBC = 15^\circ$. Это нетрудно показать, так как $\triangle AKD$ равнобедренный и $\angle KAB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Значит, в равнобедренном треугольнике AKB углы при основании...

Рис. 6

Задача 5. Дана прямая l и точка N на ней. Проведя ровно три линии, восставьте перпендикуляр из точки N к прямой l .

Решение. Из любой точки F как из центра радиусом, равным FN , проводим окружность ω . Пусть она вторично пересекает прямую l в точке T (рис.7). Вторая линия –

Рис. 7

луч TF , пересекающий второй раз ω в точке Q . Третья линия – отрезок QN , который будет перпендикулярен прямой l . Подумайте, друзья мои, почему.

Задача 6. Дана прямая l и точка N вне прямой. Тремя линиями проведите через N прямую параллельно l .

Решение. Из любой точки K прямой l как из центра строим окружность ω радиуса KN . Пусть она пересекает l в точках A и B (рис.8). Вторая линия: из точки A раствором циркуля, равным BN , делаем засечку на ω – получаем точку P . Прямая PN будет

Рис. 8

параллельна прямой l . Почему? (Не забудьте, что хорды BN и AP равны!)

Задача 7. Дан остроугольный треугольник ABC с указанной серединой D его стороны BC . Проведя не более трех линий, постройте точку H пересечения высот (ортоцентр) треугольника ABC .

Решение. Первая линия – окружность ω с центром в точке D радиуса $DB = DC$. Пусть ω пересекает стороны AC и AB в точках P и T соответственно (рис.9). Поскольку

Рис. 9

$\angle BPC = \angle BTC = 90^\circ$, то отрезки BP и CT – соответственно, вторая и третья линии, которые пересекаются в ортоцентре H .

Задача 8. Около треугольника ABC описана окружность ω , центр которой не указан. Указаны точки L и Q – соответственно, основания внутренней и внешней биссектрис угла A . Проведя не более трех линий, постройте диаметр окружности.

Решение. Первая линия: продолжим луч AL до пересечения с ω в точке N (рис.10). Вторая линия: луч QA при продолжении пересекает ω в точке F . Третья линия: FN совпадает с диаметром ω . Почему? (Покажите, что $\angle LAQ = 90^\circ$.)

Задача 9. Дан остроугольный треугольник ABC с указанными ортоцентром H и центром описанной окружности – точкой O . Тремя линиями постройте три равных угла.

Рис. 10

Рис. 11

Решение. Первая линия — отрезок AH . Вторая линия — отрезок AO . Третья линия — отрезок CO (рис.11). То, что $\angle 1 = \angle 2$ — очевидно ($AO = CO$ — радиусы описанной окружности треугольника ABC). А вот почему $\angle 2 = \angle 3$ — докажете! (Мои друзья-математики называют такие прямые, как AH и AO , *изогоналями*.)

Задача 10. Дана окружность с центром O , описанная около треугольника ABC , AF — ее диаметр. Точка M — центроид (точка пересечения медиан) треугольника ABC . Проведя не более трех линий, постройте ортоцентр H треугольника ABC .

Решение. Скажу вам, друзья мои, что это, пожалуй, самая сложная задача. Я рискнул предложить ее жителям Луны лишь после того, как поведал им о моем выдающемся друге — Леонарде Эйлеру! Ведь именно он, а не кто-нибудь другой, доказал, что точки O , M и H лежат на одной прямой — *прямой Эйлера*! К тому же моих лунных подопечных изумил такой важный факт геометрии треугольника: расстояние от центра описанной окружности до стороны в 2 раза меньше расстояния от ортоцентра до противоположной вершины. В обозначениях рисунка 12 это выглядит так:

Рис. 12

$OD = \frac{1}{2} AH$. Постарайтесь самостоятельно доказать это интересное, полезное утверждение! И тогда станет очевидным, что луч FD проходит через ортоцентр H . После сказанного мной решить задачу для лунных жителей уже не составило труда.

Первая линия: луч AM пересекает сторону BC в точке D — ее середине (рис.13).

Вторая линия: луч FD , который проходит через точку H .

Третья линия: прямая OM , которая со-

Рис. 13

впадает с прямой Эйлера. Она пересекает луч FD в ортоцентре H .

Если не устали, друзья мои, с удовольствием предложу три задачи на построение тремя линиями — для самостоятельного решения!

Задача 11. Дана прямая l и точка N вне этой прямой. Тремя линиями проведите перпендикуляр из точки N к прямой l .

Задача 12. Окружности ω и s пересекаются в точках A и B . Через A проведена произволь-

Рис. 14

ная секущая TQ (рис.14). Проведя три линии, постройте два параллельных отрезка.

Задача 13. Дан треугольник ABC с указанными центрами описанной и вписанной в него окружностей — точками O и I соответственно (рис.15). Проведя три линии, постройте окружность, описанную около треугольника BIC .

Рис. 15

Со слов барона Карла Фридриха Иеронима фон Мюнхгаузена записал Г.Филипповский

От редакции. Всем, кому нравятся задачи на поиск оптимальных геометрических построений, рекомендуем игру Euclidea (сайт euclidea.xyz).