Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Белов, Фазовые диаграммы колебательных систем, *Квант*,
2021, номер 9, 29–31

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20210905>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 13:52:10

Фазовые диаграммы колебательных систем

Ф. БЕЛОВ

БОЛЬШИНСТВО ШКОЛЬНИКОВ старших классов знакомы с классическими примерами гармонических осцилляторов – системами, параметры которых подчиняются уравнению

$$x'' + \omega^2 x = 0, \quad (1)$$

и определяются гармонической функцией (решением этого уравнения)

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0) \text{ либо } x = A \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Широко известны колебания математического маятника, груза на пружине, ареометра на поверхности жидкости, жидкости в сообщающихся сосудах, заряженной бусинки на стержне между двумя закрепленными зарядами. Все они описываются одним и тем же уравнением и отличаются лишь параметром x , которым может быть любая отклоняющаяся от своего значения в положении устойчивого равновесия величина. Но есть и менее известные примеры. Так, в статье В. Можая «Колебания» («Квант», 1981, № 3) рассматриваются колебания тонкого (с распределенной по его кольцу массой) обруча радиусом r , движущегося без проскальзывания по внутренней поверхности цилиндра радиусом $R > r$, и колебания массивного поршня, закрывающего сосуд с газом, в изотермическом процессе. Я. Смородинский в статье «Похожие движения» («Квант», 2002, № 3) описывает решение задачи о движении тела по туннелю в Земле. Во всех этих случаях применение законов механики либо термодинамики приводят к уравнению гармонического осциллятора.

Традиционно используются динамический и энергетический подходы к таким задачам. А вот графические интерпретации связей

параметров колебательных систем часто обходят стороной, хотя они оказываются очень полезными при решении различных задач, которые иными способами будут решаться долго и сложно. Речь идет о фазовых диаграммах колебательных систем.

Не уточняя конкретику колебательной системы, рассмотрим совместно решение уравнений гармонического осциллятора для координаты и скорости ее изменения (заметим, что координата может быть и углом отклонения математического маятника, и уровнем погружения ареометра, и численностью популяции хищников или жертв в биологической системе). Не теряя общности, остановимся на варианте, когда координата определяется функцией синуса (это случай запуска колебаний с помощью толчка системы из положения равновесия):

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0),$$

$$v = x' = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Используя основное тригонометрическое тождество, получим

$$x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 = A^2. \quad (2)$$

Очевидно, что (2) является уравнением эллипса в координатах $(x; v)$ или окружностью радиусом A с центром в точке $(0; 0)$ в координатах $(x; v/\omega)$. Иными словами, множество пар значений координаты и скорости при колебаниях системы будет геометрическим местом точек, равноудаленных на расстояние амплитуды колебаний от начала координат. Возникшими особенностями геометрического аспекта нельзя не воспользоваться. Очень часто геометрические и графические интерпретации физических процессов оказываются существенно удобнее и рациональнее при решении конкретных задач, чем трудоемкие алгебраические выкладки. К такому же уравнению (2) мы придем, если запишем закон сохранения энергии. Например, для груза массой m , совершающего колебания на пружине жесткостью k , закон сохранения энергии может быть записан следующим образом:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}.$$

После очевидного упрощения, с учетом соотношения $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, получим уравнение (2).

Рис. 1

Построим обнаруженную окружность в координатах $(x; v/\omega)$ (рис.1). Такое построение и носит название фазовой диаграммы. Точки пересечения окружности с осью ординат соответствуют переходу системы через положение равновесия, где скорость объекта максимальна (например, для математического маятника это моменты времени, когда грузик пролетает нижнюю точку). Точки пересечения с осью абсцисс – моменты, когда тело находится в положении максимального отклонения от равновесия и не имеет скорости, а его координата равна по модулю амплитуде.

Перебор всех точек построенной окружности происходит для колебательной системы в течение периода колебаний. Неважно, из какой точки мы начинаем движение по окружности (от этого будет зависеть начальная фаза колебаний φ_0), в процессе изменения координат $(x; v/\omega)$ будут пройдены все значения отклонений и скоростей колеблющегося тела. Кроме того, можно заметить, что движение точки по фазовой диаграмме происходит обязательно по часовой стрелке. Действительно, выводя математический маятник из положения равновесия в точку с координатой $x = A$, мы обеспечим нарастающую по модулю отрицательную проекцию скорости, т.е. будем наблюдать перебор точек фазовой диаграммы в четвертой координатной четверти и далее. Аналогичным образом можно убедиться, что при любом начальном положении точка фазовой диаграммы будет равномерно перемещаться по часовой стрелке.

Интересно также, что равномерное движение точки по фазовой диаграмме происходит с

угловой скоростью ω , так как с такой частотой меняются координата и скорость. Поэтому угловые расстояния между точками фазовой диаграммы пропорциональны времени, которое колебательная система затрачивает на соответствующее изменение параметров.

Некоторые общие идеи о применении фазовых диаграмм для описания колебаний математического маятника и других систем можно найти в статье А.Веселова «О математике гармонических колебаний» («Квант», 1986, № 5). Однако чаще геометрические интерпретации колебательных систем приводят к более известному методу векторных диаграмм, как, например, в статье А.Кикоина «Гармонические колебания. Сложение колебаний» («Квант», 1984, № 9).

Покажем на конкретных примерах возможности, которые дает применение фазовых диаграмм в различных ситуациях.

Задача 1. Груз массой 100 г, закрепленный на пружине жесткостью 10 Н/м, может совершать колебания в горизонтальном направлении по гладкой плоскости. На расстоянии 10 см от положения груза при недеформированном состоянии пружины стоит неподвижная стена. С каким периодом будет совершать колебания груз, если отвести его в противоположном стене направлении на расстояние 20 см от положения равновесия? Удар груза о стену абсолютно упругий.

Решение этой задачи координатным методом не слишком трудоемко. Действительно, при отсутствии стены координата менялась бы по закону

$$x = -0,2 \cos \omega t,$$

где $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10$ рад/с, а ось x направлена к стене. Для решения вопроса об изменении периода в силу наличия стены достаточно определить время, в течение которого координата менялась бы от значения $x = 0,1$ м до значения $x = 0,2$ м:

$$t_1 = \frac{T}{2\pi} \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{T}{3},$$

$$t_2 = \frac{T}{2\pi} \arccos(-1) = \frac{T}{2} \text{ и } \Delta t = \frac{T}{6},$$

где $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ – полный период колебаний в

отсутствие стены. Тогда искомый период равен

$$T - 2\Delta t = \frac{2T}{3} = 0,42 \text{ с.}$$

Однако графическая интерпретация колебаний дает результат практически мгновенно. Колебания начинаются из точки с

фазовыми координатами $\left(x = -0,2 \text{ м}; \frac{v}{\omega} = 0\right)$,

в точке с абсциссой $x = 0,1 \text{ м}$ встречается стена, которая благодаря абсолютно упругому удару меняет скорость тела на противоположную по направлению. Соответственно, в этот момент на фазовой плоскости происходит мгновенный скачок по вертикали в точку, симметричную относительно оси абсцисс (рис.2). Показанная пунктиром на диаграмме часть окружности выпадает из геометрического места точек, имеющих координатами параметры груза в разные моменты времени. В дальнейшем колебания происходят по части диаграммы, показанной сплошной линией. Выделенные на рисунке центральные углы, очевидно, равны $\frac{\pi}{3}$, значит, период колебаний, пропорциональный угловой мере проходимой дуги, будет равен

$$T - \frac{2\pi/3}{2\pi} = \frac{2}{3}T = 0,42 \text{ с,}$$

где T – полный период колебаний в отсутствие стены (соответствующий перемещению точки фазовой плоскости по полной окружности).

Рис. 2

Рис. 3

Аналогичная фазовая диаграмма получится и в случае колебаний математического маятника, сталкивающегося упруго со стеной в одной из точек своей траектории. Если математический маятник разместить между двумя упругими стенками, ограничивающими его колебания, мы получим вырезку двух дуг из окружности (рис.3) и сможем в зависимости от условий системы аналогично определить период колебаний по угловой мере дуги, показанных сплошной линией.

Здесь появляется повод поговорить о зависимости и независимости периода колебаний от амплитуды. Мы привыкли отмечать, что период колебаний пружинного или математического маятника в случае малых колебаний (когда и справедливо уравнение (1)) не зависит от амплитуды. Этот факт следует из всех решений уравнения гармонического осциллятора и легко проверяется экспериментально. Однако, при условии движения с ограничениями в виде стенок или иных препятствий полное время колебаний, очевидно, будет зависеть от амплитуды. Например, на рисунке 4 представлено семейство фазовых диаграмм, аналогичных показанной на рисунке 2. В зависимости от того, на какое расстояние груз отведен вначале, столкновение с неподвижной стеной произойдет раньше или позже (или вообще не произойдет). Соответственно, и градусная мера дуги окружности, по которой перемещается точка фазовой плоскости, может быть различной. Этот факт может показаться неожиданным, но при неизменности

(Продолжение см. на с. 34)

(Начало см. на с. 29)

Рис. 4

общего периода свободных колебаний системы без ограничений время попадания в фиксированную точку, не совпадающую с положением равновесия или крайнего отклонения, действительно будет зависеть от амплитуды.

Рис. 5

Задача 2. Математический маятник на нити длиной $l = 50$ см совершает колебания в вертикальной плоскости вдоль стены, в которую вбит гвоздь на расстоянии 25 см от точки подвеса и 5 см от вертикали, проходящей через точку подвеса (рис.5). Опре-

делите период колебаний маятника, если отклонение маятника в сторону, противоположную той части, где вбит гвоздь, происходит на максимальный угол 30° .

Предполагая, что маятник совершает малые колебания (при максимальном отклонении 30° это допустимо), отметим, что амплитуда отклонения груза на первом этапе движения равна $A_1 = \frac{1}{2}l = 25$ см, а колебания происходят с частотой $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. В момент, когда нить достигает гвоздя, координата груза равна $x_1 = \frac{5}{25}l = 10$ см. После этого движение соответствует части колебаний с частотой $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l/2}} = \sqrt{2}\omega_1$. Следовательно, в

этот момент величина v/ω уменьшается в $\sqrt{2}$ раз, а положение равновесия смещается в точку с абсциссой 5 см.

Построим, с учетом всего сказанного, фазовую диаграмму, которая очевидно будет состоять из частей двух окружностей (рис.6). Первая окружность имеет центр в начале координат и радиус A_1 , вторая – центр в точке с координатами (5; 0) и радиус

$$A_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}x_1\right)^2 + \left(\frac{v}{\omega_2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}x_1\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{\omega_1}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2}x_1\right)^2 + \frac{1}{2}(A_1^2 - x_1^2)} = \sqrt{\frac{1}{2}A_1^2 - \frac{1}{4}x_1^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{23}{50}}A_1 \approx 17 \text{ см.}$$

Искомый общий период колебаний такой системы определяется угловыми мерами дуг окружностей, которые показаны на фазовой диаграмме сплошной линией:

$$T = \frac{2\pi - 2\varphi_1}{2\pi}T_1 + \frac{2\varphi_2}{2\pi}T_2 = T_1 - \frac{\varphi_1}{\pi}T_1 + \frac{\varphi_2}{\pi}T_2,$$

$$\varphi_1 = \arccos \frac{x_1}{A_1}, \quad \varphi_2 = \arccos \frac{x_1}{2A_2},$$

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}, \quad T \approx 1,32 \text{ с.}$$

Рис. 6

Рис. 7

Часто встречается более простая версия такой задачи, когда гвоздь располагается на одной вертикали с точкой подвеса. Ясно, что в этом случае период равен $T = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_2$, а фазовая диаграмма не оказывается необходимой, так как представляет собой тривиальный чертеж – две полуокружности с общим центром, но разными радиусами (рис.7).

Задача 3. Груз массой m падает без начальной скорости с высоты h на чашку пружинных весов, которая в начальный момент времени была неподвижна (рис.8).

Жесткость пружины k , масса чашки M . Определите амплитуду возникающих колебаний. Считайте, что удар груза о чашку неупругий и после столкновения чашка с грузом движутся как единое целое, но груз не прилипает к чашке. При какой начальной высоте h может произойти отрыв груза от чашки в верхней точке колебаний?

Рис. 8

Серия таких задач традиционно встречается при рассмотрении механических колебаний в разных пособиях. Чаще всего предлагается энергетический способ решения. Нельзя не привести его здесь для того, чтобы показать разницу в сравнении с вариантом решения с помощью фазовой диаграммы.

Перед столкновением с чашкой груз имеет скорость, определяемую законом сохранения

энергии для этапа его свободного движения:

$$mgh = \frac{mv_1^2}{2}, \text{ и } v_1 = \sqrt{2gh}.$$

По закону сохранения импульса после удара чашка с грузом будут иметь другую скорость:

$$mv_1 = (m + M)v_2, \text{ и } v_2 = \frac{m}{m + M}\sqrt{2gh}.$$

Запишем закон сохранения энергии для этапа последующего движения чашки с грузом до момента максимального растяжения пружины:

$$(m + M)g\Delta x + \frac{(m + M)v_2^2}{2} + \frac{k\Delta x_0^2}{2} = \frac{k(\Delta x_0 + \Delta x)^2}{2},$$

где Δx_0 – начальная деформация пружины, которая удерживает чашку, а Δx – смещение чашки с грузом до момента максимального растяжения. Обозначим Δx_1 – деформацию пружины, соответствующую новому положению равновесия пружины с грузом.

Очевидно, что $\Delta x_0 = \frac{Mg}{k}$, $\Delta x_1 = \frac{(m + M)g}{k}$, а искомая амплитуда колебаний $A = \Delta x - (\Delta x_1 - \Delta x_0)$. Решение уравнения относительно Δx приводит к следующему:

$$(m + M)g\Delta x + \frac{2m^2gh}{2(m + M)} + \frac{k\Delta x_0^2}{2} = \frac{k\Delta x_0^2}{2} + k\Delta x_0\Delta x + \frac{k(\Delta x)^2}{2},$$

$$mg\Delta x + Mg\Delta x + \frac{m^2gh}{m + M} = Mg\Delta x + \frac{k(\Delta x)^2}{2},$$

$$\frac{k(\Delta x)^2}{2} - mg\Delta x - \frac{m^2gh}{m + M} = 0,$$

$$\Delta x = \frac{mg}{k} \pm \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kh}{(m + M)g}},$$

$$A = \Delta x - (\Delta x_1 - \Delta x_0) = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kh}{(m + M)g}}.$$

Ответ на вопрос о том, при каких условиях груз сможет отрываться от чашки в верхней точке, требует определения ускорения системы в верхнем положении и сравнения его с

г. Но прежде, чем рассматривать эту часть задачи, давайте оценим красоту и рациональность варианта решения с помощью фазовой диаграммы.

Найти скорость чашки с грузом после удара, естественно, все равно придется:

$$v_2 = \frac{m}{m+M} \sqrt{2gh}.$$

А также следует указать на отличие координаты чашки с грузом в момент удара от ее нового положения равновесия:

$$\Delta x_0 = \frac{Mg}{k}, \Delta x_1 = \frac{(m+M)g}{k}, \Delta x_1 - \Delta x_0 = \frac{mg}{k}.$$

Определив направление оси x вниз и за начало отсчета выбрав новую точку равновесия, можем сказать, что построение диаграммы должно начинаться из точки с координатами $\left(-\frac{mg}{k}; \frac{v_2}{\omega}\right)$, где $\omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}}$. Отсюда с очевидностью следует (рис.9), что искомая амплитуда – радиус окружности на фазовой плоскости – рассчитывается на основании теоремы Пифагора:

$$A = \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{\omega}\right)^2} = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kh}{(m+M)g}}.$$

Читатель, наверное, согласится, что геометрическое построение в данном случае существенно легче, чем оценка энергетических параметров системы. Заметим, что в рамках энергетического подхода к описанию подобной системы можно было бы не рас-

Рис. 9

сматривать отдельные потенциальные энергии элементов системы, а записать ее в целом как величину, пропорциональную квадрату отклонения от нового положения равнове-

сия: $\frac{k(\Delta x_1 - \Delta x_0)^2}{2}$. Затем, суммируя с начальной кинетической энергией, приравнять к конечной потенциальной $\frac{kA^2}{2}$ и тем самым обойти указанное выше объемное квадратное уравнение. Однако практика показывает, что подобное упрощение порой вызывает у школьников сложности в понимании, связанные с желанием все равно учитывать изменение гравитационной потенциальной энергии, чего делать в таком случае не надо. Построенная фазовая диаграмма, как мы полагаем, исключает неоднозначность в толковании потенциальной энергии и сопутствующие этому проблемы.

Высота h , при которой может наступить отрыв грузика от чашки в верхней точке, очевидно, определяется условием того, что ускорение системы в верхней точке превосходит g :

$$a = A\omega^2 = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kh}{(m+M)g}} \frac{k}{m+M} \geq g,$$

$$h \geq \frac{Mg(m+M)(2m+M)}{2mk^2}.$$

Интересно, что с помощью фазовых диаграмм легко описать поведение механической системы в случае затухания ее колебаний под действием сил трения.

Задача 4. На горизонтальной поверхности лежит грузик массой $m = 1$ кг, соединенный с неподвижной вертикальной стеной горизонтальной невесомой пружиной жесткостью $k = 10$ Н/м (рис.10). Коэффициент трения между грузиком и поверхностью $\mu = 0,1$. Пружина не деформирована. Грузику сообщают начальную скорость $1,5$ м/с. Оцените время, которое занял процесс колебаний от начала движения грузика до полной его остановки.

Основной фактор, определяю-

Рис. 10

ший вид фазовой диаграммы в данном случае, – наличие так называемой зоны застоя $\left(-\frac{\mu mg}{k}; \frac{\mu mg}{k}\right)$, в пределах которой возникающая сила упругости меньше максимальной силы трения покоя. Если груз попадает в эту зону с нулевой скоростью, то возможностей для преодоления ее у него не останется и колебания прекратятся.

Для построения соответствующей фазовой диаграммы запишем уравнение гармонического осциллятора с учетом силы трения. При движении груза вправо сила трения будет направлена противоположно оси x :

$$x'' + \frac{k}{m}x + \mu g = 0,$$

$$x'' + \frac{k}{m}\left(x + \frac{\mu mg}{k}\right) = 0.$$

Тогда решением является, очевидно, функция

$$x = -\frac{\mu mg}{k} + A \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Это означает, что дуга окружности CE (рис. 11), характеризующая этап движения в направлении оси x , будет построена с центром в точке $A\left(-\frac{\mu mg}{k}; 0\right)$. Радиус этой окружности равен

$$A_1 = \sqrt{\left(\frac{\mu mg}{k}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}.$$

Рис. 11

В момент попадания груза в точку E фазовой диаграммы (точка крайнего правого отклонения от положения равновесия) меняются направление силы трения и знаки перед слагаемыми, ее характеризующими, в соответствующих уравнениях:

$$x'' + \frac{k}{m}x - \mu g = 0,$$

$$x'' + \frac{k}{m}\left(x - \frac{\mu mg}{k}\right) = 0,$$

$$x = \frac{\mu mg}{k} + A \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Дуга окружности ED , характеризующая этап движения в направлении, противоположном оси x , будет построена с центром в точке $B\left(\frac{\mu mg}{k}; 0\right)$. Радиус этой окружности равен

$$A_2 = A_1 - 2\frac{\mu mg}{k}.$$

После этого все повторяется. Центр окружности постоянно перемещается между краями зоны застоя, амплитуда каждый раз сокращается на ширину зоны застоя, а количество витков получающейся спирали определяется начальным запасом энергии (т.е. радиусом первой дуги). В нашем случае спираль состоит из трех секций (в чем читатель может убедиться, проведя соответствующие расчеты). После попадания в зону застоя (точка F) с нулевой скоростью тело не сможет выйти за ее пределы. Общее время движения складывается из частей периодов, определяемых угловыми мерами соответствующих дуг:

$$t = \frac{\varphi}{2\pi}T + \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T,$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{v_0/\omega}{\mu mg/k}\right), T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, t \approx 4,4 \text{ с.}$$

Такого рода задачи часто встречаются в олимпиадах разного уровня. В качестве примера рассмотрим альтернативное авторскому решению задачи финала олимпиады «Физтех» (10 класс, 2017 г.).

Задача 5. На наклоненной под углом α ($\cos \alpha = 3/4$) к горизонту поверхности лежит брусок, прикрепленный к упругой невесомой и достаточно длинной пружине (рис. 12). Коэффициент трения бруска о поверхность $\mu = 1/6$. Брусок отклоняют вниз

Рис. 12

вдоль поверхности на расстояние $A_0 = 35$ см от точки 0, соответствующей положению равновесия бруска при отсутствии трения. Затем брусок отпускают, и начинаются затухающие колебания. Если брусок подвесить на этой пружине, то она удлинится на $x_0 = 32$ см.

1) На каком расстоянии от точки 0 окажется брусок при первой остановке?

2) На каком расстоянии от точки 0 брусок остановится окончательно?

Авторский вариант решения предполагает обращение к закону сохранения энергии. Однако фазовая диаграмма здесь, как и во многих подобных ситуациях, дает более рациональный вариант решения. Учитывая представленные в задаче 4 рассуждения о виде уравнения гармонического осциллятора и смещении центра окружностей при построении диаграммы, мы можем ограничиться только оценкой самой ширины зоны застоя для того, чтобы построить соответствующую системе фазовую диаграмму. Как и в предыдущей задаче, она будет иметь вид сворачивающейся спирали. Для построения диаграммы, очевидно, следует определить зону застоя, начальную амплитуду и после элементарных расчетов оценить количество ветвей спирали.

В положении нуля выбранной оси брусок находится в равновесии при отсутствии трения. Значит, растяжение пружины в этот момент равно

$$\Delta l_0 = \frac{mg \sin \alpha}{k}.$$

Зона застоя $(-x_1; x_1)$, в пределах которой возникающая сила упругости не может преодолеть равнодействующую силы трения покоя и компоненту силы тяжести, определяется исходя из условий равновесия в ее

Рис. 13

крайних точках:

$$k(\Delta l_0 + x_1) = mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha,$$

$$k(\Delta l_0 - x_1) = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha.$$

С учетом значения Δl_0 получим

$$x_1 = \frac{\mu mg \cos \alpha}{k}.$$

По условию брусок, подвешенный на пружине вертикально, удлиняет ее на $x_0 = 32$ см, значит, $x_1 = \mu x_0 \cos \alpha = 4$ см, а ширина зоны застоя $2x_1 = 8$ см. Тогда ответ на первый вопрос находится сразу:

$$A_1 = A_0 - 2x_1 = 27 \text{ см.}$$

А диаграмма колебания является спиралью из трех витков (рис. 13). В точке D (координата 27 см) брусок впервые поворачивает и начинает движение вниз, доходит до точки с координатой $-(27 - 2x_1) = -19$ см, еще раз поворачивает и движется вверх в точку с координатой $19 - 2x_1 = 11$ см, а последний раз на пути вниз попадает в точку с координатой $-(11 - 2x_1) = -3$ см, где и останавливается, так как точка лежит в зоне застоя.

Подводя итог, сформулируем алгоритм применения метода фазовых диаграмм:

1) если уравнение зависимости координат фазовой плоскости не очевидно сразу, его необходимо получить, чтобы определить влияние внешних сил, увеличивающих или

уменьшающих амплитуду колебаний на каждом шаге;

2) определить начальную точку построения диаграммы и ее центр;

3) построить диаграмму в виде дуг окружностей или спирали;

4) сделать необходимые выводы о временных или пространственных параметрах системы на основании вида диаграммы и геометрических соотношений между отдельными ее элементами.

Для закрепления навыков построения фазовых диаграмм предлагаем читателю самостоятельно решить несколько задач, аналогичных рассмотренным выше.

Упражнения

1. Постройте семейство фазовых диаграмм для колебаний груза массой m , висящего на упругом резиновом шнуре с коэффициентом упругости k . Определите вид диаграммы и область ее расположения в зависимости от значения начального расстояния, на которое отводят груз вниз для начала колебаний.

2. Груз массой m находится в состоянии равновесия на вертикальной пружине жесткостью k , прикрепленной к потолку. Снизу к грузу прикреплена такая же невесомая пружина, нижний конец которой расположен на расстоянии L от пола ($L > mg/k$). Сверху на груз маятника падает кольцо массой m с высоты H . Постройте фазовую диаграмму колебаний системы. Определите период колебаний. Какие значения может принимать период колебаний в зависимости от высоты H ? Рассмотрите все возможные случаи.

3. На горизонтальной поверхности с коэффициентом трения $\mu = 0,1$ находится брусок массой $m = 1$ кг, соединенный горизонтальной недеформированной невесомой пружиной с вертикальной стеной. Жесткость пружины $k = 0,1$ Н/см. Брусок сместили на расстояние $l = 58,5$ см от положения недеформированного состояния пружины и отпустили без начальной скорости. Определите время, в течение которого брусок будет совершать затухающие колебания, и расстояние, на котором

он остановится от положения равновесия.

4. Груз массой m падает без начальной скорости с высоты h на чашку пружинных весов, которая в начальный момент времени была неподвижна (см. рис.8). Жесткость пружины k , масса чашки ничтожно мала. Определите амплитуду возникающих колебаний. Считайте, что удар груза о чашку неупругий и после столкновения чашка с грузом движутся как единое целое.

5. Кусочек пластилина массой m запускают вверх со скоростью v_0 . На высоте h от точки броска он сталкивается с закрепленной на вертикальной пружине платформой, которая в начальный момент времени была неподвижна, и прилипает к ней. Жесткость пружины k , масса платформы M . Определите амплитуду возникающих колебаний.

6. Математический маятник на нити длиной $l = 40$ см совершает колебания в вертикальной плоскости вдоль стены. Под точкой подвеса на расстоянии $\Delta l = 30$ см от нее вбит гвоздь. Определите период колебаний маятника.

7. Математический маятник на нити длиной l совершает колебания в вертикальной плоскости вдоль стены, в которую вбит гвоздь на расстоянии Δl от точки подвеса и Δx от вертикали, проходящей через точку подвеса. Определите период колебаний маятника, если отклонение маятника в сторону, противоположную той части, где вбит гвоздь, превосходит на максимальный угол φ . Считайте колебания малыми.

8 (финал олимпиады «Физтех», 10 класс, 2017 г.). На наклоненной под углом α ($\cos \alpha = 3/4$) к горизонту поверхности лежит брусок, прикрепленный к упругой невесомой и достаточно длинной пружине (см.рис.12). Коэффициент трения бруска о поверхность $\mu = 2/7$. Брусок отклоняют вниз вдоль поверхности на расстояние $A_0 = 41$ см от точки 0, соответствующей положению равновесия бруска при отсутствии трения. Затем брусок отпускают, и начинаются затухающие колебания. Если брусок подвесить на этой пружине, то она удлинится на $x_0 = 28$ см.

1) На каком расстоянии от точки 0 окажется брусок при первой остановке?

2) В какой точке брусок остановится окончательно?

Вниманию наших читателей

Подписаться на журнал «Квант» можно с любого номера в любом почтовом отделении. Наш подписной индекс в каталоге «Пресса России» – 90964.

Купить журнал «Квант» возможно в магазине «Математическая книга» издательства МЦНМО (адрес интернет-магазина: biblio.mcsme.ru), а также в московских книжных магазинах «Библио-глобус», «Молодая гвардия», «Московский дом книги» и в редакции журнала.

Архив вышедших номеров журнала «Квант» имеется на сайте <http://kvant.ras.ru>