Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Акопян, Апельсины, канализационные люки и разрезание длинного прямоугольника, *Квант*, 2021, номер 9, 40–43

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20210906>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 16:40:43

Апельсины, канализационные люки и разрезание длинного прямоугольника

А. АКОПЯН

К праздничному столу апельсины часто режут круглыми дольками (рис. 1). Обычно все дольки имеют одинаковую толщину, но задумывались ли вы, какие из этих долек содержат больше кожуры: те, которые относятся к той части, что ближе к центру апельсина, или те, которые ближе к краю?

Оказывается, что если долька не является «шляпкой», то количество кожуры не зависит от того, к какой части апельсина она относится (конечно, мы считаем апельсин шаром).

На рисунке 2 срезаны две дольки апельсина одинаковой толщины. Как вы думаете, на какой из долек больше кожуры?

Рассмотрим разрез (сечение) апельсина плоскостью. Пусть радиус апельсина (с кожурой) равен R , а радиус внутренней части апельсина (апельсина без кожуры) равен r (рис. 3). Пусть d — расстояние от центра апельсина до плоскости разреза. Найдем пло-

Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

щадь желтого кольца, т.е. той части разреза, которая принадлежит кожуре. Обозначим радиусы кругов в разрезе апельсина r_1 и R_1 .

Площадь S желтого кольца равняется разности площадей большого и маленького кругов, т.е. $\pi R_1^2 - \pi r_1^2$. С другой стороны, по теореме Пифагора $R_1^2 = R^2 - d^2$, а $r_1^2 = r^2 - d^2$. Подставив эти выражения в формулу для S , получим, что $S = \pi(R^2 - r^2)$, т.е. зависит только от радиусов апельсина с кожурой и без кожуры.

Из этого следует, что если h — толщина дольки апельсина, то объем кожуры в ней будет равен $\pi h(R^2 - r^2)$. Объяснить это можно, например, с помощью принципа Кавальери: объемы двух тел с равными по площади сечениями всех общих секущих их плоскостей, параллельных данной плоскости, равны (рис. 4). Действительно, по принципу Кавальери, объем кожуры в дольке толщины h будет равен объему параллелепипеда (или цилиндра) с площадью основания $\pi(R^2 - r^2)$ и высотой h , т.е. $\pi h(R^2 - r^2)$.

Рис. 4

Заметим, что если у апельсина кожа очень тонкая, то ее объем на дольке примерно равен площади поверхности кожуры на дольке, умноженной на толщину кожуры, равную $R - r$. Тогда площадь поверхности кожуры на апельсиновой дольке толщины h примерно равна $\pi h \frac{(R^2 - r^2)}{(R - r)}$. Устремив r к

R , можно прийти к следующему удивительному заключению, называемому иногда **леммой Архимеда**:

Площадь поверхности кожуры на апельсиновой дольке зависит только от толщины этой дольки h и от радиуса апельсина R и равна $2\pi hR$.

Отметим, что эта величина равна площади боковой поверхности кругового цилиндра высоты h и радиуса R .

Теперь легко увидеть, что площадь поверхности всего апельсина радиуса R равна $4\pi R^2$.

Это наблюдение дает нам интересный способ построить карту Земли, а именно спроецировать точки на поверхность цилиндра, описанного около Земли, с соответствующими угловой и вертикальной координатами (рис.5), после чего изображение на цилиндре можно развернуть в плоскую карту. Такая проекция называется проекцией Ламберта и

как раз хороша тем, что изображенные на ней объекты имеют площадь, пропорциональную их настоящей площади.

На проекции Ламберта не создается такого визуального эффекта, как на привычных нам картах мира, на которых Гренландия по размеру кажется больше Африки, хотя на самом деле меньше Алжира. Дело в том, что обычно такие карты рисуют с помощью проекции Меркатора, основной плюс которой – точное сохранение углов между кривыми на поверхности Земли и на карте, это было очень важно для морской навигации.

Одно из самых красивых приложений леммы Архимеда придумал Генрик Моэзе в 1932 году. Его теорему можно переформулировать так:

Если вы хотите покрыть канализационный люк дощечками так, чтобы не осталось дырок, то сумма ширин дощечек должна быть не меньше диаметра самого люка (рис.6).

Доказательство. Обозначим дощечки, участвующие в нашем покрытии, через $P_1, P_2, \dots, P_n$, а их ширины через $h_1, h_2, \dots, h_n$. Радиус канализационного люка обозначим через R .

Рис. 6

Рис. 5

Рис. 7

Надстроим над люком сферу радиуса R и для каждой дощечки P_i рассмотрим кольцо C_i на сфере, вертикальной проекцией которого является дощечка (рис.7). Из леммы Архимеда следует, что площадь этого кольца равна $2\pi h_i R$. Поскольку дощечки покрывают канализационный люк, колечки должны покрывать сферу, а значит, их общая площадь должна быть не меньше площади сферы:

$$2\pi h_1 R + 2\pi h_2 R + \dots + 2\pi h_n R \geq 4\pi R^2.$$

После сокращения левой и правой частей на $2\pi R$ получим требуемое неравенство для суммы ширин дощечек:

$$h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n \geq 2R.$$

Генрик Моэзе придумал эту теорему, решая следующую задачу, поставленную знаменитым польским математиком Альфредом Тарским: на какое минимальное число частей надо разрезать длинный и тоненький прямоугольник $n \times 1/n$, чтобы из них можно было сложить квадрат 1×1 ?

Читатель сразу скажет: конечно, на n частей! Это правда, но доказать это не так просто. Именно для этого Моэзе и понадобилась его теорема. Он рассуждал так.

Пусть мы разрезали прямоугольник $n \times 1/n$ на меньшее число частей, скажем на k , и сложили из них квадрат. Каждую из этих частей можно накрыть тоненькой дощечкой ширины $1/n$. Выходит, что в совокупности эти полоски накроют единичный квадрат, а значит, и круг диаметра 1, вписанный в него. Но по доказанной теореме о канализационном люке мы знаем, что это невозможно, поскольку суммарная ширина дощечек будет $k/n < 1$. Пришли к противоречию.

Теорема Моэзе о люке была позже обобщена Т.Бангом на случай любого выпуклого тела (см. статью А.Спивака и М.Смурова «Покрывание полосками» в «Кванте» №4, 5 за 1998 г.). Доказательство Банга основано на совершенно другой идее. Но это, конечно, не единственное применение леммы Архимеда в математике. Например, двадцать лет назад Карой Бездей и Боб Коннелли с помощью нее доказали следующую теорему:

Пусть на плоскости нарисовано несколько кругов. Если их сдвинуть так, что расстояние между центрами каждой пары уменьшится, то площадь их объединения не может увеличиться, а площадь пересечения – уменьшиться.

Мы не будем здесь приводить доказательство, поскольку оно заняло бы несколько страниц и использует понятия, выходящие за пределы темы этой статьи. Скажем лишь, что в размерности три (и выше) аналогичное утверждение про шары остается недоказанным и называется гипотезами Кнезера–Полулсена (для объединения) и Кли–Вагона (для пересечения).

Удивительно, что сравнительно недавно, в 2006 году, известный математик Вин Де Силва нашел следующее обобщение леммы Архимеда:

Пусть дана сфера Ω и касательный к ней конус с вершиной в некоторой точке O . Тогда любые две сферы с центром в O (пересекающие сферу Ω) отрезают от конуса и от сферы колечки одинаковой площади (рис.8).

Эта теорема превращается в лемму Архимеда, если точка O находится на бесконечно-

Рис. 8

Рис. 9

сти, т.е. соответствующий конус является цилиндром, а секущие сферы – плоскостями, перпендикулярными его оси.

Другой интересный и давно известный случай получается, когда точка O лежит на сфере Ω и касательный конус с вершиной в ней вырождается в плоскость (рис.9). Предположив, что радиус большей секущей сферы равен r , а меньшей 0 , получаем, что площадь высекаемой на Ω шапочки равна площади высекаемого на плоскости круга, т.е. πr^2 . Неожиданно замечательная формула, не правда ли?

Загадка плоского стекла

Л.АШКИНАЗИ

И он показал Харберту прибор, заменивший ему линзу. Это были два стекла, снятые с часов инженера и Спилета. Наполнив их водой и скрепив их края с помощью глины, Сайрес Смит сделал настоящее зажигательное стекло, которое сосредоточило лучи солнца на охапке сухого мха и воспламенило его.

Жюль Верн. Таинственный остров

Мы видим мир через оконное стекло и на вопрос, искажает ли это стекло картинку, улыбнемся и ответим – конечно, нет. А теперь посмотрим на ситуацию более внимательно, начав со школьного учебника.

Все мы знаем, что такое линза. Объектив фотоаппарата и микроскопа – это линзы, лупа и очки – тоже линзы, и даже на передней панели радиостанции (рис.1 и 2) мы видим линзы. При этом одна относится к более редкой категории «асферической оптики», впрочем, такое бывает и в очках – видели на рецептах слово «цилиндр»? Увеличивать, уменьшать, отдалять, приближать, переворачивать – все, что ухитряется делать линза с изображениями, ей удастся потому, что луч света, проходящий через линзу, попадает на

Рис. 1

Рис. 2

переднюю и заднюю ее поверхности, наклоненные к оси линзы, под разными углами – рисунок 3, ситуация 1, луч 1. Кроме, разумеется, случая, когда луч проходит через центр линзы и, в первом приближении, падает на обе поверхности под одинаковыми углами.