Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Стасенко, Кто искривил пространство-время?, *Квант*, 2021, номер 10, 26–29

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20211003>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 13:22:46

Кто искривил пространство-время?

А. СТАСЕНКО

Тяготение – некоторый наиболее неуловимый божественный дух (something concerning a certain most subtle Spirit).

Не действуют ли тела на свет на расстоянии и не изгибают ли этим действием его лучей...?

И. Ньютон

Немало революций было в физике и в общественном мнении. Так, оказалось, что Земля круглая! Что она вращается вокруг Солнца, а не наоборот. Что нельзя осуществить вечный двигатель. Что...

Одна из самых шумных революций началась порядка (как скажет настоящий физик) сотни лет назад. Она потрясла привычные представления о пространстве и времени. Но если другие «революции» (например, демонстрация ядерной бомбы) вполне наглядны, то для понимания теории относительности Альберта Эйнштейна (1879–1955) требуется немало усилий. Для осознания всей глубины теории относительности желательно как можно раньше прислушаться хотя бы к ее терминологии (говорят, в Японии уже с

детства приучают к нравам конкретной фирмы). Поэтому со священным трепетом коснемся лишь некоторых мраморных колонн этого величественного здания.

Есть в этой великолепной теории понятие интервала – дифференциально малого расстояния Δs между близкими точками, которое должно сохраняться при преобразовании координат. Это свойство называется инвариантностью по отношению к преобразованиям. В трехмерном евклидовом пространстве интервал описывается привычным для нас соотношением (рис. 1):

$$\Delta s^2 = (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2).$$

Да это же просто 3D-теорема Пифагора! – воскликнет любой здравомыслящий школьник. В принципе, при богатом воображении можно представить себе и четвертую, временную мнимую ось с приращением $c\Delta t$ (штриховая кривая, рис. 2). Но это все еще декартово-евклидово пространство, в котором «работает» теорема Пифагора, сохраняя Δs .

А теперь представим себе, что введены неодинаковые деформации пространственных $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ и временных $(c\Delta t)$ промежутков, вызванные гравитирующим телом массой M :

$$\Delta s^2 = (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) \times [1 + \Psi] + \Delta t^2 [1 - \Psi], \quad (1)$$

где

$$\Psi = \frac{2GM}{c^2 r} = \left(\frac{v_{II}}{c}\right)^2 \left(\frac{R}{r}\right)^2.$$

Здесь $v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ – знакомая из школы вторая космическая скорость, или скорость

Рис. 1. Интервал Δs в нашем 3D-пространстве (x, y, z)

Рис. 2. Попробуйте вообразить 4D-кирпич (параллелепипед) в (x, y, z, ct) -пространстве

убегания, которую необходимо сообщить телу для того, чтобы оно, покинув планету радиусом R , остановилось на бесконечности от ее поверхности.

В квадратных скобках видны разные знаки, что приводит к теоретическому выводу: чем меньше гравитационный объект, тем в большей степени «гравитация действительно мешает ходу времени» – как пишут в интернете. Эту «поправку» на гравитацию можно представить как отношение двух

характерных удельных энергий $\frac{MG}{r}$ и $\frac{c^2}{2}$.

Первая из них – явно ньютонов потенциал, вторая – да не придет нам на ум трактовать ее как «кинетическую энергию единицы массы»! Ведь ясно, что удельная энергия

не может превзойти величину $\frac{E}{m} = c^2$.

Значит, гравитация, искривляя пространство и время, удвоит потенциал, так что логично записать отношение энергий в виде

$\left(\frac{2MG}{r}\right)\left(\frac{1}{c^2}\right)$. Для условий на поверхности

Земли ($r = R$) получим следующую очень малую численную оценку отношения энергий:

$$\frac{2MG}{Rc^2} = \frac{2gR}{c^2} = \left(\frac{v_{\pi}}{c}\right)^2 = -\left(\frac{11,2 \text{ км/с}}{3 \cdot 10^5 \text{ км/с}}\right)^2 \approx 1,4 \cdot 10^{-9}.$$

Может быть поэтому другой великий физик Эрнест Резерфорд (1871–1937) не очень высоко оценил рассматриваемую теорию: «А, чепуха! – ответил он. – Для нашей работы это не нужно!... У нас слишком много здравого смысла». («У нас» – надо полагать у англо-саксов.)

Однако, если эта «поправка» станет равна единице, скобка после Δt^2 в выражении (1) обратится в ноль – как тут не прийти в отчаянье: куда подевалось время? При этом

значение $\frac{2MG}{Rc^2} = 1$ соответствует черной дыре, где $R = \frac{2MG}{c^2}$ – так называемый

радиус Шварцшильда. В эту дыру проваливаются все соседи, испустив последнее излучение перед пакибытием (см. недавнюю

Рис. 3. а) Кривизна сферы постоянна и равна $1/R$. б) Кривизна 2D-пространства (поверхности) по Гауссу равна $1/(R_1R_2)$ и имеет размерность $1/\text{м}^2$

статью Л. Белопухова «Черные дыры существуют» в «Кванте» № 3 за 2021 г.).

В рассматриваемой теории важную роль играет кривизна пространства. Те, кто считали землю плоской, утверждали фактически, что ее кривизна равна нулю; тот, кто считал ее поверхность сферой, приписывал ей радиус кривизны R и, следовательно, единственное значение кривизны $K = \frac{1}{R}$.

В случае более сложной поверхности – например, как скорлупа куриного яйца – кривизна изменяется от точки к точке, но в каждой точке можно выделить две главные кривизны R_1 и R_2 (рис. 3). Как тут не вспомнить принципиальный спор между тупоконечниками и остроконечниками Лилипутии в сатирическом романе Джонатана Свифта «Путешествия Гулливера»!

В математике вводится понятие средней

кривизны: $\langle K \rangle = \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}{2}$ и так называемой

гауссовой кривизны: $K = K_1K_2 = \frac{1}{R_1R_2}$, имеющей размерность $\frac{1}{\text{м}^2}$ и названной

в честь великого математика Карла Гаусса (1777–1855).

Но поверхность яйца – двумерный объект. Что же будет в четырехмерном пространстве-времени!? Оказывается, оно ужасно кривое. Эйнштейн, используя результаты и опыт своих предшественников и друзей (Гильберта, Гаусса, Римана, Пуанкаре, Смолуховского, Гроссмана ...), получил систему уравнений для многих кривизн, каждая из которых порождена одной из физических сущностей, составляющих так называемый тензор энергии-импульса T . Этот тензор – таблица из десяти различных компонент – имеет одну и ту же размерность, которую можно записать в виде объемной плотности энергии, или давления, или плотности потока импульса:

$$\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \left(\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} \right) \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \frac{1}{\text{м}^3}.$$

Уже это делает теорию Общей. Здесь важно упомянуть также об «эквивалентности массы и энергии», утверждаемой формулой $E = mc^2$.

Таким образом, уравнение гравитации Эйнштейна – это система десяти уравнений; чтобы в ней разобраться, нужно получить образование, например окончить МГУ или Физтех, или ... «Несмотря на поразительные и впечатляющие экспериментальные подтверждения теории относительности, многим людям трудно воспринять ее четырехмерный неевклидов мир» (Морис Клайн. «Математика. Поиск истины»). Поэтому воспользуемся советом Энрико Ферми: «В физике ... нет места для путанных мыслей. Действительно понимающие природу того или иного явления должны получать основные законы из соображений размерности».

Итак, каждая из кривизн, имеющих размерность $\frac{1}{\text{м}^2}$, должна быть пропорциональна на порождающей эту кривизну «физической причине», имеющей размерность $\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}$.

В качестве коэффициента пропорциональности естественно ожидать появление ньютоновской константы тяготения

$$G = 6,67430(15) \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}.$$

Но произведение GT , как легко проверить, имеет размерность $\frac{1}{\text{м}^2} \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right)^4$. Совершенно

очевидно, что, для того чтобы получить требуемую размерность кривизны, нужно произведение GT разделить на какую-то скорость в четвертой степени. А какая скорость характерна в теории относительности? Конечно, скорость распространения любого сигнала – скорость света. Таким образом,

$$K \sim \frac{GT}{c^4}. \quad (2)$$

Строгая теория дает еще множитель 8π в правой части, так что комбинация $\frac{8\pi G}{c^4}$

называется гравитационной постоянной Эйнштейна. Теперь выражение (2) все больше становится похожим на знаменитое уравнение Эйнштейна. Да и левая часть этого выражения выглядит сложнее: перед каждым приращением пространства-времени появится свой множитель, да еще какой – тензорный! Собственно, целью решения уравнения гравитации и является отыскание компонент этих «множителей», описывающих искривление пространственно-временного континуума.

Но и это наше достижение не мало: установлено некоторое фундаментальное соотношение между соучастниками процесса. Как упомянуто в эпиграфе, возможность искривления лучей света в гравитационном поле подозревал еще Ньютон. Но теория относительности Эйнштейна позволила определять геометрические свойства пространства, в котором лучи света – прямые!

Итак, специальная и общая теории относительности (СТО – 1905 г. и ОТО – 1912 г.) признаны революцией в физике. Упомянем некоторые характерные цитаты классиков и популяризаторов науки: «Пространство-время – единая физическая сущность»; «Материя сообщает пространству, *как* искривляться, а искривленное пространство сообщает материи, *как* двигаться». Здесь характерный термин: *как*. Но есть ли ответ: *почему*? И, хотя мир в восторге от изящества доказанного факта идентичности кривизны мира и его масс-энерго-импульсных аспектов, удалось ли обнаружить физику такой связи? И не остается ли мысль вели-

кого Ньютона вызовом новым поколениям мыслителей? И случайно ли гравитационная константа обозначается символом G (не от *gravity*, а от *Got*)?

Приложение

Ничто не придает солидности труду, как Приложение (старая истина). Сделаем еще шаг вперед: распишем тот самый тензор T (рис. 4), что должен стоять в правой части уравнения Эйнштейна и описывать различные «искривления» пространства-времени:

$$T = \begin{pmatrix} T_{00} & 0 & 0 & 0 \\ T_{10} & 0 & 0 & 0 \\ T_{20} & 0 & 0 & 0 \\ T_{30} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{12} & T_{13} \\ 0 & T_{12} & 0 & T_{23} \\ 0 & T_{13} & T_{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{33} \end{pmatrix}$$

Первое слагаемое содержит компоненты тензора объемной плотности энергии T_{00} и плотности потока импульса. Второе – компоненты плотности потока энергии (деленные на скорость света c). Третье – тангенциальные напряжения типа возникающих в вязкой жидкости. Например, при течении жидкости вдоль пластины (ось x) продольная компонента скорости изменяется в перпендикулярном направлении (ось y); таким образом, соответствующая компонента тензора напряжения обозначится как T_{xy} . А если перенумеровать оси x, y, z, ct как 0, 1, 2, 3, получим T_{12} . Обратим еще внимание на то, что компонент всего три, а не шесть – это свойство симметрии относительно диагонали тензора: $T_{12} = T_{21}$ и т.д. Наконец, четвертое слагаемое описывает компоненты

$$K_{ij} - \frac{1}{2} K g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$$

Рис. 4. Просто рисунок, повесьте его на стену и любуйтесь. Придет время – при желании поймете. Здесь K_{ij} – десять кривизн пространства-времени (x, y, z, ct), порожденных тензором T . (В классической записи слева стоят символы R_{ij} ; буква R – из уважения к Риману)

нормальных напряжений. Напомним, что все компоненты имеют одинаковые размерности $\frac{Дж}{м^3}$.

В частном случае, когда все потоки равны нулю, получим

$$T = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

Первая диагональная компонента – это известное соотношение $\frac{E}{V} = \frac{mc^2}{V}$ для энергии в расчете на единицу объема V , а $p = \frac{m}{V}$. Остальные три – закон Паскаля:

давление в жидкости p одинаково во всех направлениях. Это знакомо, можно сказать, с детства и вселяет уверенность, что мы в состоянии понять все, что создано Человеком.

БИБЛИО-ГЛОБУС
ВАШ ГЛАВНЫЙ КНИЖНЫЙ

**МЫ ПРЕДЛАГАЕМ
БОЛЬШОЙ ВЫБОР ТОВАРОВ И УСЛУГ**

<p>УСЛУГИ</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Интернет-магазин www.bgshop.ru ■ Кафе ■ Клубные (дисконтные) карты и акции ■ Подарочные карты ■ Предварительные заказы на книги ■ Встречи с авторами ■ Читательские клубы по интересам ■ Индивидуальное обслуживание ■ Подарочная упаковка ■ Доставка книг из-за рубежа ■ Выставки-продажи 	<p>АССОРТИМЕНТ</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Книги ■ Аудиокниги ■ Антиквариат и предметы коллекционирования ■ Фильмы, музыка, игры, софт ■ Канцелярские и офисные товары ■ Цветы ■ Сувениры
--	--

г. Москва,
м. Лубянка,
м. Китай-город
ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1

8 (495) 781-19-00

www.biblio-globus.ru
пн – пт 9:00 - 22:00
сб – вс 10:00 - 21:00
без перерыва на обед