Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Нестеренко, Нетранзитивные кости, *Квант*, 2021, номер 10, 30–31

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20211004>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 14:09:35

Нетранзитивные КОСТИ

А. НЕСТЕРЕНКО

Нетранзитивный парадокс

При игре в кости по обычным правилам выигрывает игральная кость, на которой выпала грань с большим числом. Если на двух костях разные наборы чисел, одна из них может оказаться сильнее другой в том смысле, что вероятность ее выигрыша больше $1/2$.

Возьмем такие три кости, что в каждой паре есть сильнейшая. Кажется, что среди этих трех костей должна найтись самая сильная, которая бьет две другие. Ведь если кость A сильнее B , а кость B сильнее C , здравый смысл подсказывает, что A тем более сильнее C .

Это не так. На рисунке 1 показаны развертки трех костей с вероятностями выигрыша первой у второй $p_1 = 5/9$, второй у третьей $p_2 = 2/3$ и третьей у первой $p_3 = 2/3$. Такие кости называют *нетранзитивными*: из того, что A сильнее B и B сильнее C , не следует, что A сильнее C .

5						1					3		
2	2	2	2			4	4	4	4		3	3	3
5						1					3		
Кость 1				Кость 2				Кость 3					

Рис. 1

Известна игра с нетранзитивными костями по таким правилам: играют двое, сначала они по очереди выбирают себе по кости, а дальше как обычно – выигрывает тот игрок, на чьей кости выпадает большее число. Кажется парадоксом, что тот, кто выбирает вторым, всегда может обеспечить себе веро-

ятность выигрыша больше $\frac{1}{2}$. Но это так.

Первый игрок не может выбрать сильнейшую кость: в нетранзитивном наборе такой

просто нет. Зато второй всегда может взять кость сильнее кости первого.

Нетранзитивный волчок

Чтобы разобраться, как работает такая нетранзитивность, и примирить здравый смысл с кажущимся парадоксом, рассмотрим игру в нетранзитивный волчок (рис.2).

Рис. 2. Нетранзитивный волчок

Диск волчка, который крутится вокруг неподвижной вертикальной оси, разделен на три сектора с углами α , β и γ . Рядом с диском установлена неподвижная риска. Два игрока выбирают себе по сектору. Волчок раскручивают и смотрят, в каком положении он остановится. Сектор α в игре с β проигрывает, если α окажется напротив риски (в остальных случаях α выигрывает). Сектор β проигрывает в игре с γ , если напротив риски окажется сектор β . И γ проигрывает в игре с α , если напротив риски будет γ .

Будем измерять углы в долях полного оборота, так что $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Тогда вероятность проигрыша сектора α сектору β равна α , сектора β сектору γ равна β , и сектора γ сектору α равна γ . Обозначим через p_1 , p_2 и p_3 , соответственно, вероятности выигрыша сектора α в игре с сектором β , сектора β в игре с сектором γ и сектора γ в игре с сектором α . Тогда $p_1 = 1 - \alpha$, $p_2 = 1 - \beta$, $p_3 = 1 - \gamma$.

При $\alpha, \beta, \gamma < \frac{1}{2}$ каждая из вероятностей p_1 , p_2 и p_3 больше $1/2$, т.е. игра нетранзитивная. Например, если секторы одинаковые

$$(\alpha = \beta = \gamma = 1/3), \text{ то } p_1 = p_2 = p_3 = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}.$$

В игре с волчком сумма вероятностей выигрышей всегда равна 2:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1 - \alpha + 1 - \beta + 1 - \gamma = 3 - (\alpha + \beta + \gamma) = 2. \quad (1)$$

Предположим, что игрок, который выбирает сектор первым, делает это случайным об-

1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3

Рис. 7. Представление из трех групп цифр

Если между двумя единицами в представлении двоек больше, чем троек, то правую единицу можно перенести вплотную к левой. При этом p_1 увеличится сильнее, чем уменьшится p_3 , и сумма вероятностей возрастет. Если между двумя единицами в представлении троек больше, чем двоек, то левую единицу можно перенести вплотную к правой. И снова сумма вероятностей возрастет, так как p_3 увеличится сильнее, чем уменьшится p_1 . Если между двумя единицами двоек и троек поровну, то любую из этих единиц можно перенести вплотную к другой без изменения суммы вероятностей. Значит, в любом представлении все единицы можно собрать в одну группу единиц, стоящих подряд, не уменьшив при этом сумму вероятностей.

Это же верно и для двоек, и для троек, поэтому любое представление можно преобразовать в три группы из идущих подряд одинаковых цифр, не уменьшив сумму $p_1 + p_2 + p_3$. Например, представление на рисунке 5 преобразуется в представление с не меньшей суммой вероятностей на рисунке 7.

Представлениям из трех групп, идущих в порядке $2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$, $3 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ или $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ (как на рисунке 7), соответствует сумма вероятностей 2. Для остальных случаев сумма вероятностей равна 1. Взяв любые три кости, мы можем преобразовать их представление в представление из трех групп с суммой вероятностей не больше двух. Так как при преобразовании сумма вероятностей не уменьшается, для любых трех костей верно неравенство¹:

$$p_1 + p_2 + p_3 \leq 2. \quad (2)$$

Для нетранзитивных костей верна оценка сильнее.

Теорема. Для трех шестигранных нетранзитивных костей выполняется неравенство

$$p_1 + p_2 + p_3 \leq \frac{17}{9}. \quad (3)$$

Для доказательства нам понадобится различать представления по количеству

3	3	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	1	1
Гр. 1			Гр. 2			Гр. 3					Гр. 4			Гр. 5		

Табл. 2

идущих подряд групп одинаковых чисел. В таблице 2 приведен пример представления, содержащего пять групп.

Назовем представление (и соответствующий набор) *оптимальным*², если сумму вероятностей нельзя увеличить, поменяв местами два каких-нибудь соседних номера. В оптимальном представлении не встречаются фрагменты $[2|1]$, $[3|2]$ и $[1|3]$. Действительно, если какая-нибудь из этих пар есть, номера в ней можно поменять местами, при этом одна из вероятностей p_1 , p_2 и p_3 увеличится на $1/36$.

Любое представление можно сделать оптимальным, меняя местами номера в парах $[2|1]$, $[3|2]$ и $[1|3]$, пока ни одной такой пары не останется. При этом ни одна из вероятностей p_1 , p_2 и p_3 не уменьшится и верно следующее утверждение.

Утверждение 1. Для любого набора костей с вероятностями p_1 , p_2 и p_3 существует оптимальный набор с вероятностями p'_1 , p'_2 и p'_3 такой, что $p'_1 \geq p_1$, $p'_2 \geq p_2$ и $p'_3 \geq p_3$.

Отсюда следует, что для любого нетранзитивного набора костей найдется оптимальный нетранзитивный набор с не меньшей суммой вероятностей $p_1 + p_2 + p_3$.

Для доказательства теоремы нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений.

Утверждение 2. Для любого оптимального набора из трех костей с числом групп $n > 3$ в представлении найдется оптимальный набор из трех костей с числом групп $n - 1$ и не меньшей суммой вероятностей $p_1 + p_2 + p_3$.

Тем самым, с увеличением числа групп максимально возможная сумма вероятностей оптимального набора костей не возрастает.

Утверждение 3. Максимальная сумма вероятностей для оптимального набора из трех шестигранных костей с количеством групп больше пяти равна $67/36$.

Утверждение 4. В представлении любого набора из трех нетранзитивных костей не менее 5 групп.

¹ Для N костей, играющих друг с другом по кругу, сумма вероятностей не превосходит $N - 1$.

² Термин заимствован из статьи [1].

Представление	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	1	1	1	1	2	2
Номер группы по порядку	1		2		3				4				5					
Обозначение группы и ее длина	$x_1 = 2$		$y_1 = 4$		$z_1 = 6$				$x_2 = 4$				$y_2 = 2$					

Табл. 3

Утверждение 5. Максимальная сумма вероятностей для трех нетранзитивных шестигранных костей с представлением из пяти групп равна $17/9$.

Доказательство теоремы. Возьмем произвольный нетранзитивный набор из трех шестигранных костей. Сделаем, если нужно, его представление оптимальным, меняя местами номера во фрагментах $[2|1]$, $[3|2]$ и $[1|3]$. При этом нетранзитивность сохранится, сумма вероятностей может только увеличиться. В полученном оптимальном нетранзитивном наборе меньше пяти групп быть не может (утверждение 4). Если групп ровно 5, то сумма вероятностей не больше чем $17/9$ (утверждение 5). Если групп больше пяти, то сумма вероятностей нового набора не больше чем $67/36$ (утверждение 3), а это меньше чем $17/9$.

Мы взяли произвольный нетранзитивный набор из трех шестигранных костей, преобразовали его, не уменьшив сумму вероятностей, при этом эта сумма оказалась не больше $17/9$. Значит, у любых нетранзитивных костей сумма вероятностей не больше $17/9$.

Максимально возможная сумма вероятностей $17/9$ достигается для нетранзитивных костей на рисунке 1. Если при игре в три нетранзитивные шестигранные кости первый игрок выбирает кость случайно, а второй играет наилучшим образом, то вероятность выигрыша второго не превышает

$$\frac{p_1 + p_2 + p_3}{3} = \frac{17}{27}.$$

Доказательства утверждений 2–5

Начиная с этого момента, будем для простоты и определенности считать, что наибольшее число из встречающихся в наборе костей находится на кости номер 1. Тогда все возможные представления начинаются с единиц, а в оптимальных представлениях группы чередуются в порядке 12312312..., где цифра 1 означает группу, состоящую из единиц, и т.д.

Доказательство утверждения 2. В оптимальном представлении расставим скобки,

заклучив в них фрагменты, состоящие из трех последовательных групп (123), и последний фрагмент из одной или двух групп, если он есть. Получается одно из трех разбиений:

$$\begin{aligned} &(123)(123)\dots(123), \\ &(123)(123)\dots(123)(12), \\ &(123)(123)\dots(123)(1). \end{aligned}$$

Обозначим через x_j , y_j и z_j первую, вторую и третью группы в j -й скобке. Эти обозначения будем применять не только для самих групп, но и для их длин, поскольку путаницы здесь не возникнет. В таблице 3 показан пример. Оптимальное представление можно записать в виде последовательности длин групп $x_1 y_1 z_1 x_2 y_2 z_2 \dots$. Рассмотрим три случая в зависимости от того, какой группой оканчивается представление.

Случай 1. Представление оканчивается группой z : $x_1 y_1 z_1 x_2 y_2 z_2 \dots x_k y_k z_k$, общее число групп равно $n = k$, где $k \geq 2$.

а) Если $x_1 \leq y_1$ то $x_2 + x_3 + \dots + x_k \geq y_2 + y_3 + \dots + y_k$. Перенесем группу z_k влево, объединим ее с группой z_1 и объединенную группу снова назовем z_1 :

$$x_1 y_1 z_1 z_k x_2 y_2 z_2 \dots x_k y_k \rightarrow x_1 y_1 z_1 x_2 y_2 \dots x_k y_k.$$

Получится оптимальный набор с не меньшей суммой вероятностей и количеством групп $n - 1$. Сумма вероятностей не уменьшается, так как каждая тройка из самой правой группы «перешагивает», двигаясь справа налево, не меньше единиц, чем двоек. Значит, вероятность p_3 выросла не меньше, чем уменьшилась вероятность p_2 .

б) Если $x_1 > y_1$, то перенесем z_k из конца в начало представления:

$$z_k x_1 y_1 z_1 x_2 y_2 z_2 \dots x_k y_k.$$

Представление остается оптимальным, число групп не изменилось. Сумма вероятностей тоже не изменилась, так как вероятность p_3 выросла ровно на столько, на сколько уменьшилась вероятность p_2 . Теперь первой оказалась группа троек.

Циклически переименуем кости (и, стало быть, группы) и снова получим представление $x_1y_1z_1x_2y_2z_2 \dots x_ky_kz_k$.

Будем повторять эту процедуру до тех пор, пока на каком-то шаге не окажется, что $x_1 \leq y_1$, а это обязательно произойдет: невозможно, чтобы было $x_1 > y_1 > z_1 > \dots > x_{k+1} > y_{k+1} > z_{k+1} > x_1$. Когда выполнится условие $x_1 \leq y_1$, применим процедуру из пункта а) и получим оптимальные кости с количеством групп $n-1$ и суммой вероятностей не меньшей, чем была.

Случай 2. Представление оканчивается группой x : $x_1y_1z_1x_2y_2z_2 \dots x_{k+1}$, общее число групп равно $n = 3k + 1$, где $k \geq 1$.

В этом случае между группами x_1 и x_{k+1} находится поровну двоек и троек, поэтому группу x_{k+1} можно перенести влево и объединить с группой x_1 без изменения суммы вероятностей:

$$x_1x_{k+1}y_1z_1x_2y_2z_2 \dots z_k \rightarrow x_1y_1z_1x_2y_2z_2 \dots z_k.$$

После слияния x_1 и x_{k+1} в одну новую группу x_1 получается оптимальный набор костей, где сумма вероятностей прежняя, а число групп равно $n-1$.

Случай 3. Представление оканчивается группой y : $x_1y_1z_1x_2y_2z_2 \dots x_{k+1}y_{k+1}$, общее число групп равно $n = 3k + 2$, где $k \geq 1$.

Между группами y_1 и y_{k+1} заключены все группы z и все группы x , кроме x_1 . Поэтому единиц между y_1 и y_{k+1} меньше, чем троек. Перенесем группу y_{k+1} влево и сольем с группой y_1 :

$$x_1y_1y_{k+1}z_1x_2y_2z_2 \dots x_{k+1} \rightarrow x_1y_1z_1x_2y_2z_2 \dots x_{k+1}.$$

Получается оптимальный набор из $n-1$ групп, а сумма вероятностей выросла.

Все случаи исчерпаны. Утверждение доказано.

Доказательство утверждения 3. Вначале докажем, что для трех оптимальных шестигранных костей с шестью группами в представлении максимальная сумма вероятностей равна $67/36$.

В оптимальном представлении группы чередуются в порядке 123123. Обозначим длины первых трех групп x , y и z . Тогда длины всех шести последовательно расположенных групп равны $x, y, z, (6-x), (6-y)$ и $(6-z)$. Все группы не пустые: $1 \leq x \leq 5$, $1 \leq y \leq 5$, $1 \leq z \leq 5$, поэтому

$$\begin{cases} p_1 = \frac{6x + (6-x)(6-y)}{36} = \frac{36-6y+xy}{36}, \\ p_2 = \frac{6y + (6-y)(6-z)}{36} = \frac{36-6z+xy}{36}, \\ p_3 = \frac{z(6-x)}{36} = \frac{6z-zx}{36}. \end{cases}$$

Сумма вероятностей равна

$$R = p_1 + p_2 + p_3 = 2 + \frac{y(z+x-6)-zx}{36}.$$

Рассмотрим три случая в зависимости от знака выражения $z+x-6$.

Случай 1: $z+x-6 > 0$. Тогда R растет с ростом y , поэтому максимум будет при $y=5$. Перебором возможных значений x и z найдем наибольшее значение выражения $5z+5x-zx-30$ (табл. 4). Поскольку выражение симметрично, можно считать, что $x \leq z$.

Случай 2: $z+x-6 = 0$. Наибольшее значение выражения $-zx$ равно -5 и достигается, например, при $x=1$, $z=5$.

Случай 3: $z+x-6 < 0$. Тогда R убывает с ростом y , поэтому наибольшее значение R принимает при $y=1$. Найдем наибольшее значение выражения $z+x-6-zx$ перебором (табл. 5). Снова пользуясь симметрией, ограничимся условием $x \leq z$.

Во всех трех случаях наибольшее значение R равно

$$2 - \frac{5}{36} = \frac{67}{36}.$$

В соответствии с утверждением 2 сумма вероятностей оптимальных наборов костей не возрастает с ростом числа групп. Значит, сумма вероятностей выигрыша оптимальных костей с представлением из шести и более групп не превосходит $67/36$. Утверждение доказано.

x	2	3	3	4	4	5
z	5	4	5	4	5	5
$5z + 5x - zx - 30$	-5	-7	-5	-6	-5	-5

Табл. 4

x	1	1	1	1	2	2
z	1	2	3	4	2	3
$z + x - 6 - zx$	-5	-5	-5	-5	-6	-7

Табл. 5

Доказательство утверждения 4 (это доказательство работает для костей с произвольным количеством граней). Меньше трех групп быть не может, так как костей три. Если групп три, то самая правая не бьет никакую другую: $p_3 = 0$, и поэтому набор не является нетранзитивным.

Предположим, что групп четыре. Представление без ограничения общности начинается с единицы, и заканчиваться оно должно тоже единицей, поскольку в противном случае кость 3 не может выигрывать у кости 1. Получается единственная возможная последовательность групп 1231 (табл. 6).

Представление	1 ... 1	2 ... 2	3 ... 3	1 ... 1
Длина группы	x_1	$y_1 = N_2$	$z_1 = N_3$	x_2

Табл. 6

Обозначим количества граней у костей 1, 2 и 3, соответственно, N_1 , N_2 и N_3 , а через x_1 , y_1 , z_1 , x_2 — длины групп с первой по четвертую. Тогда

$$p_1 + p_3 = \frac{x_1 y_1}{N_1 N_2} + \frac{z_1 x_2}{N_3 N_1} = \frac{x_1 N_2}{N_1 N_2} + \frac{N_3 x_2}{N_3 N_1} = \frac{x_1 + x_2}{N_1} = \frac{N_1}{N_1} = 1.$$

Раз так, то числа p_1 и p_2 не могут одновременно быть больше 0,5, а это противоречит нетранзитивности.

Таким образом, для нетранзитивности необходимо не меньше пяти групп. Утверждение доказано.

Доказательство утверждения 5. Если представление из пяти групп задает нетранзитивные кости с максимальной суммой вероятностей, то это представление оптимальное: группы следуют в порядке 12312.

Обозначим длины первых двух групп x и y . Учитывая, что средняя группа содержит все шесть граней, длины групп в порядке их следования равны x , y , $6 - (x + y)$, $6 - x$, $6 - y$. Получаем

$$p_1 = \frac{6x + (6 - x)(6 - y)}{36},$$

$$p_2 = \frac{6y}{36},$$

$$p_3 = \frac{6(6 - x)}{36},$$

или

$$\begin{cases} p_1 = 1 - \frac{6y - xy}{36}, \\ p_2 = \frac{y}{6}, \\ p_3 = 1 - \frac{x}{6}. \end{cases}$$

Условия нетранзитивности костей $\frac{1}{2} < p_1 \leq 1$,

$\frac{1}{2} < p_2 \leq 1$ и $\frac{1}{2} < p_3 \leq 1$ выполняются, если:

$$\begin{cases} 18 - 6y + xy > 0, \\ y > 3, \\ x < 3. \end{cases}$$

Проверим выполнение этих условий при всех возможных x , y (табл. 7). Единственное решение $x = 2$, $y = 4$. При этом

$$p_1 + p_2 + p_3 = 2 + \frac{x(y - 6)}{36} = 2 - \frac{2 \cdot 2}{36} = \frac{17}{9}$$

Утверждение доказано.

x	1	1	2	2
y	4	5	4	5
$18 - 6y + xy$	-2	-7	2	-2

Табл. 7

Максимальная сумма вероятностей для трех N -гранных костей

Утверждения 3 и 5 можно обобщить на случай трех костей с N гранями каждая.³

Утверждение 3. Максимальная сумма вероятностей для оптимального набора из трех костей с N гранями каждая и с количеством групп в представлении больше пяти равна

$$2 - \frac{N - 1}{N^2}.$$

Утверждение 5. Максимальная сумма вероятностей для трех нетранзитивных костей с N гранями каждая и с представлением из пяти групп равна

$$2 - \frac{N - 2}{N^2} \text{ для четных } N \geq 6;$$

$$2 - \frac{N - 1}{2N^2} \text{ для нечетных } N \geq 3.$$

³ Здесь правильнее говорить о рулетках.

Число граней	Длина группы				
	Группа 1	Группа 2	Группа 3	Группа 4	Группа 5
$N \geq 6, N$ четное	2	$\frac{N}{2} + 1$	N	$N - 2$	$\frac{N}{2} - 1$
$N \geq 3, N$ нечетное	1	$\frac{N + 1}{2}$	N	$N - 1$	$\frac{N - 1}{2}$

Табл. 2

Для $N = 4$ нетранзитивных костей с представлением из пяти групп не существует.

Доказываются эти обобщенные утверждения аналогично случаю $N = 6$, только возрастает техническая сложность при нахождении максимумов выражений. Читатель может попробовать сделать соответствующие расчеты самостоятельно.

Теперь теорему о максимальной сумме вероятностей для трех нетранзитивных костей можно сформулировать так:

Теорема для N -гранных костей. Для трех нетранзитивных костей с N гранями каждая выполняются неравенства

$$p_1 + p_2 + p_3 \leq 2 - \frac{N - 2}{N^2} \text{ для четных } N \geq 6;$$

$$p_1 + p_2 + p_3 \leq 2 - \frac{N - 1}{2N^2}$$

для нечетных $N \geq 3$.

Максимальная сумма вероятностей достигается для оптимальных наборов костей с представлением из пяти групп и длинами групп, показанными в таблице 8.

Литература

1. И.И. Богданов. Нетранзитивные рулетки. – Математическое просвещение, сер. 3, вып. 14, с. 240–255.

2. М. Гарднер. Нетранзитивные парадоксы. – В книге «Путешествие во времени». – М.: Мир, 1990.

НАМ ПИШУТ

Недавно в редакцию нашего журнала пришло такое письмо.

Уважаемые квантовцы!

Рискну предложить вам Метрический кроссворд – эдакую словесную игру-загадку, в которой все зашифрованные термины имеют общий корень (или один из корней) «метр».

Отмечу, что именно под влиянием «Кванта» в далекие 1970-е я, страстный поклонник гуманитарных наук, отдал предпочтение техническому вузу – Киевскому политехническому институту (выбрав специальность, где господствовали *термометры* и *калориметры*).

Свою непродолжительную практическую инженерно-техническую деятельность связал с отраслью, где властвовали *манометры* и *дозиметры* –

на монтаже 4-го и 5-го энергоблоков ЧАЭС и ликвидации последствий Чернобыльской аварии.

После этого приобщился к содружеству профессиональных почитателей *миллиметровки* – в проектно институте «Киевский промстройпроект». Затем на два десятилетия с головой ушел в сферу, где в большой чести господствовали *одинадцатиметровый* и *стометровка*, – в спортивную журналистику.

И вот уже полвека храню верность кроссвордистике. Шутка сказать – мой первый кроссворд в «Кванте» был напечатан еще в 1979 году.

С уважением, В.Закревский

Этот кроссворд мы публикуем на 4-й странице обложки нашего журнала.