Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Емельянов, Необычное определение конических сечений,
Квант, 2021, номер 11, 2–4

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20211101>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 10:28:31

Необычное определение конических сечений

Л. ЕМЕЛЬЯНОВ

КАК ИЗВЕСТНО, ТРИ КОНИЧЕСКИХ сечения – эллипс, парабола и гипербола – могут быть определены с помощью прямой d (директрисы) и точки F (фокуса), на этой прямой не лежащей (см. рисунок 1, а также «Калейдоскоп «Кванта» в этом номере). Кривая определяется

Рис. 1

$$\frac{FE}{\rho(E, d)} = e < 1$$

$$\frac{FP}{\rho(P, d)} = e = 1$$

$$\frac{FH}{\rho(H, d)} = e > 1$$

как геометрическое место точек, для которых отношение расстояния до фокуса к расстоянию до директрисы есть заданная положительная константа e (эксцентриситет). Если при этом $e < 1$, мы получим эллипс, при $e = 1$ выйдет парабола, а при $e > 1$ – гипербола. Справедливости ради надо отметить и небольшой недостаток: в этой трактовке нет места окружности (для которой $e = 0$).

Преимущество же этого подхода к определению конических сечений не только в однотипности, но и в «корректном» переходе через положение $e = 1$. Для примера возьмем определение эллипса как множества точек с фиксированной суммой расстояний до фокусов. Если зафиксировать положение двух фокусов эллипса, а эксцентриситет устремить к 1, то в качестве «вырожденного эллипса» для $e = 1$ мы получим отрезок, а не параболу. Аналогичные проблемы возникнут при переходе через положение $e = 1$ «со стороны гиперболы».

В этой статье предлагается альтернативный способ определения трех конических сечений некоторым однотипным подходом.

Рассмотрим фиксированную окружность ω радиуса R и касательную к ней l . По прямой l скользит отрезок AB постоянной длины $2a$, из концов которого проводятся вторые касательные к ω , отличные от l . Найдем геометрическое место точек пересечения этих касательных.

На рисунке 2 представлены два варианта расположения касательных CA и CB . Точка их пересечения C и есть точка, принадлежащая искомому геометрическому месту.

Рис. 2

ГМТ будем задавать аналитически. Для определения уравнения ГМТ рассмотрим систему координат xOy и поместим центр окружности в точку $Q(0; -R)$, прямая l будет совпадать с осью Ox , отрезок AB длины $2a$ будет скользить по Ox . В качестве параметра, определяющего расположение отрезка, выберем координату его середины – $M(t; 0)$. При этом параметр t имеет право принимать любые действительные значения, а координаты концов отрезка будут таковы: $A(t - a; 0)$ и $B(t + a; 0)$ (рис. 3).

Из геометрических соображений ясно, что в зависимости от величины отноше-

ния a/R , обозначим его через e , кривая, представляющая ГМТ, будет ограниченной или «разорвется» сходом в бесконечность.

Составляя уравнения касательных к окружности из точек A и B и находя их точку пересечения C , мы получим следующее параметрическое представление нашего ГМТ:

Рис. 3

$$x = \frac{2R^2t}{t^2 + R^2 - a^2}, \quad y = \frac{2R(a^2 - t^2)}{t^2 + R^2 - a^2}. \quad (1)$$

Упражнение 1. Прodelайте соответствующие выкладки, в результате которых получаются формулы (1).

Чтобы понять тип кривой, исключим t из уравнений (1). В результате получим следующее уравнение кривой второго порядка:

$$R^2x^2 + (R^2 - a^2)y^2 + 2R(R^2 - 2a^2)y = 4R^2a^2. \quad (2)$$

Упражнение 2. Выведите (2) из (1). При этом можно воспользоваться такой схемой:

1) Поделив одно уравнение на другое, выразите $a^2 - t^2$ как линейную функцию от t .

2) Получив из одного из уравнений явное выражение для t через x , y и параметры a и R .

3) Подставив выражение для t в другое уравнение, получите (2).

Теперь разберем три случая.

1. Парабола ($a = R$).

В этом случае уравнение (2) принимает вид

$$y = \frac{1}{2R}x^2 - 2R.$$

Таким образом, мы получаем параболу с фокусом $F\left(0; -\frac{3}{2}R\right)$ и директрисой d , имеющей уравнение $y = \frac{5}{2}R$ (рис.4).

2. Эллипс ($a < R$).

Уравнение (2) имеет вид

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{(y - y_0)^2}{q^2} = 1. \quad (3)$$

Рис. 4

где

$$p = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - a^2}}, \quad q = \frac{R^3}{R^2 - a^2},$$

$$\text{или} \quad \frac{R(R^2 - 2a^2)}{R^2 - a^2}. \quad (4)$$

Фокусы эллипса имеют координаты

$$F_1\left(0; -R \frac{2a + R}{R + a}\right) \text{ всегда внутри } \omega,$$

$$F_2\left(0; R \frac{2a - R}{R - a}\right) \text{ — может быть снаружи } \omega.$$

Эллипс (рис.5) вытянут по оси Oy и никогда не бывает окружностью.

Известно, что для эллипса, заданного каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

где $0 < b \leq a$, экс-

центриситет опре-

Рис. 5

деляется как $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$. Тогда из формул (4) нетрудно увидеть, что отношение a/R , обозначенное нами через e , и есть эксцентриситет эллипса.

Упражнение 3. Проведите выкладку, показывающую, что $e = a/R$. (Не забудьте, что эллипс (3) вытянут по оси Oy .)

3. Гипербола ($a > R$).

Уравнение (2) принимает вид

$$-\frac{x^2}{p^2} + \frac{(y - y_0)^2}{q^2} = 1,$$

Рис. 6

где

$$p = \frac{R^2}{\sqrt{a^2 - R^2}}, \quad q = \frac{R^3}{a^2 - R^2}, \quad y_1 = \frac{R(R^2 - 2a^2)}{R^2 - a^2}. \quad (5)$$

Фокусы гиперболы (рис.6) имеют координаты

$$F_1 \left(0; -R \frac{2a + R}{R + a} \right) - \text{внутри } \omega,$$

$$F_2 \left(0; R \frac{2a - R}{R - a} \right) - \text{всегда снаружи } \omega.$$

Упражнение 4. Убедитесь в правильности приведенных формул. Проведите выкладку, показывающую, что эксцентриситет равен $e = a/R$ и в случае гиперболы. (Используйте тот факт, что для гиперболы, заданной каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $a > 0$, $b > 0$, эксцентриситет определяется как $\sqrt{a^2 + b^2}/a$.)

Попробуем подвести итоги нашей работы.

- Мы получили интересную параметризацию конических сечений дробно-рациональными функциями, при этом параметры имеют ясный геометрический смысл.

- Строго говоря, мы нашли не ГМТ, а лишь множество, содержащее это ГМТ. Но из простых геометрических соображений легко понять, что надо исключить лишь одну точку – вершину кривой, в которой происходит ее касание с окружностью.

стью ω . Эта точка соответствует «бесконечно удаленному» положению отрезка.

- Что объединяет все три случая? Одна конструкция, которая при различных соотношениях двух исходных параметров R и a определяет три конических сечения.

- Эксцентриситетом во всех случаях является отношение a/R , которое мы обозначили e . Это очевидно для параболы и нетрудно проверить в случаях эллипса и гиперболы, исходя из соотношений (4) и (5), определяющих длины полуосей этих кривых.

- Также нетрудно понять, что основная окружность ω касается кривой в ее вершине, причем радиус кривизны построенного конического сечения равен в этой вершине R .

- В рассматриваемой конструкции (при заданных a и R) нетрудно построить циркулем и линейкой фокусы, директрисы, полуоси, асимптоты (для гиперболы) нашего ГМТ.

- Полученные результаты можно переформулировать и следующим образом. Построим окружность, вписанную в коническое сечение, касающуюся его в вершине и радиус которой равен радиусу кривизны кривой в этой точке. Затем проведем касательную к окружности в точке, диаметрально противоположной выбранной вершине, и на этой касательной расположим отрезок длиной, равной произведению диаметра окружности на эксцентриситет кривой. Тогда касательные к окружности в концах отрезка пересекутся на этой кривой.

Говорят, что у любого содержательного математического утверждения есть содержательный обратный факт. Давайте попробуем «развернуть» конструкцию. Представим себе, что отрезок AB неподвижен, а окружность ω перемещается, оставаясь касательной к прямой l (содержащей AB). В остальном сценарий останется прежним: из точек A и B проводим касательные к ω , находим точку их пересечения C и определяем ГМТ при всевозможных положениях окружности. Что это будет за кривая? На первый взгляд, ничего существенно не изменилось, мы просто (выражаясь физическим языком) сменили систему отсчета. Но не торопитесь с выводами. Для экспериментов прекрасно подходит среда Geogebra. Дерзайте!