Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Златопольский, Двоичная арифметика Франческо Брунетти, *Квант*, 2021, номер 11, 27–29

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20211105>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 18:15:40

Двоичная арифметика Франческо Брунетти

Д. ЗЛАТОПОЛЬСКИЙ

В 1746 году Франческо Брунетти, итальянский математик, капеллан папы римского Бенедикта XIV, опубликовал книгу «Arimmetica binomica, e diadica, in cui tutte le operazioni si fanno colle sole figure Uno, e Zero» («Арифметика биномиальная, или двоичная, в которой все операции производятся только с цифрами один и ноль»).

В книге он приводит примеры двоичных чисел и методику выполнения арифметических операций с ними (в том числе с дробями и смешанным числами).

На одной из страниц в этой книге представлена запись, связанная со сложением (рис. 1).

Запись странная, на первый взгляд – не имеющая смысла. Но это не так. Дело в том, что чуть выше Брунетти пишет: «Я думал о каком-нибудь способе сокращения количества цифр при записи больших <двоичных> чисел и пришел к выводу, что нижеследующее является наиболее подходящим способом».

(Как известно, недостатком двоичной системы числения является большая «длина» чисел в ней.) Это «нижеследующее» заключается в том, что он предлагает записывать только номера (в виде десятичных цифр) разрядов, в которых представлены единицы (при нумерации начиная справа). Согласно этой системе, двоичное число 101000 (40_{10}) выглядит так: 64, а число 1010010 (82_{10}) – 752. Видно, что цифры записываются в порядке убывания.

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20211105>

Рис. 1

Порядковые номера цифр, большие 9, Брунетти предлагает обозначить как их последнюю цифру (0, 1, ..., 9), записывая справа от всех таких цифр запятую (штрих), а номера, большие 19, – аналогично с двумя запятыми и т. д. В конце такой записи автор, как правило, ставит точку. Так, запись 1,50,862 соответствует двоичному числу 100000100001010100010.

Такая система записи двоичных чисел позволяет легко сравнивать их – достаточно сопоставить только первые цифры каждого числа ($6 > 54321$; $432 < 51$ и т.п.).

Вернемся к примеру сложения, показанному на рисунке 1. Согласно предложенному Брунетти способу записи двоичных чисел, речь в нем идет о сложении трех двоичных значений:

10000100
1000010100
10001100

Как проводит расчеты автор? Он оперирует не двоичными цифрами, а десятичными

значениями (порядковыми номерами единиц).

Рассмотрим сложение двух одинаковых однозначных значений. Вот соответствующая таблица сложения (убедитесь в ее справедливости!):

$$\begin{array}{l} 1 + 1 = 2 \\ 2 + 2 = 3 \\ 3 + 3 = 4 \\ \dots \\ 8 + 8 = 9 \\ 9 + 9 = 0, \\ 0 + 0 = 1, \\ \dots \end{array}$$

При сложении все записанные по методу Брунетти числа можно выписать в одну строку. В рассматриваемом примере получим

$$830,53843.$$

Начинаем рассматривать минимальные цифры (номера). Вместо двух троек можем записать 4:

$$830,53843 \rightarrow 830,5844.$$

Вместо двух четверок – 5:

$$830,5844 \rightarrow 830,585.$$

Далее аналогично:

$$830,585 \rightarrow 830,68 \rightarrow 9360,$$

(из рисунка 1 видно, что запятой (штриха) рядом с цифрой 0 нет). Записав четыре оставшиеся цифры в порядке уменьшения, получим результат: 0,963.

Можно было также сразу записать все исходные цифры в порядке убывания – 0,8854333 («забыв» о складываемых числах) и провести аналогичные действия:

$$0,8854333 \rightarrow 0,885443 \rightarrow 0,88553 \rightarrow 0,963$$

Итак, двоичный результат сложения равен 1100100100. А вот расчеты с соответствующими двоичными числами:

$$\begin{array}{r} 10000100 \\ 1000010100 \\ \underline{10001100} \\ 1100100100 \end{array}$$

Если в слагаемых все цифры разные, то результат представляет собой последователь-

ность цифр в порядке убывания. Например,

$$63 + 71 + 54 = 765431.$$

Можно сделать вывод, что когда складываемые двоичные числа уже представлены по системе записи Брунетти, то предложенный им метод сложения будет эффективнее, чем предварительная запись двоичных слагаемых и их суммирование (конечно, при определенном навыке расчетов). Особенно этот метод эффективен при большом числе слагаемых или/и при сложении многозначных чисел. Вывод о том, является ли эффективным предложенный в XVIII веке способ сложения двоичных значений, которые надо предварительно получить из заданных десятичных чисел, предлагаем сделать читателям.

Аналогичный по сути подход использован в книге Брунетти и для вычитания, умножения и деления записанных по-особому значений двоичных чисел.

При вычитании в системе Брунетти из цифры (числа) a цифры (числа) b результат равен $(a-1)(a-2)\dots b$. Например,

$$7-3=6543; 5-3=43; 6-5=5.$$

Еще одно важное замечание. Все цифры уменьшаемого, меньшие минимальной цифры вычитаемого, «остаются» в разности.

Рассмотрим вычитание числа 853 из 0,952. Выпишем вычитаемое под уменьшаемым:

$$\begin{array}{r} 0,952 \\ 853 \end{array}$$

Как только что отмечалось, цифра 2 будет последней в искомой разности. Так как $9-3=876543$, а $0-8=98$, то разность будет равна $988765432=0,765432$.

Можно было также провести расчеты так: $0-3=9876543$; $9-8=8$; результат равен $988765432=0,765432$.

Несколько более сложный случай: $621-543$. Вычитаем из 6 любую цифру вычитаемого: $6-3=543$. Так как нужно еще вычесть 5 и 4 и учесть цифры 2 и 1, то искомая разность будет равна 321.

Теперь перейдем к умножению. Результатом умножения двух цифр (чисел) a и b будет $a \times b = a + b - 1$ (проверьте!).

Согласно правилам умножения в столбик, произведение «чисел Брунетти» 321 и 31 вычисляется так: $321 \times 1 = 321$; $321 \times 3 = 543$

(все цифры первого числа увеличиваются на 2). Результат равен $543321 = 621$.

Вот как компактно выглядит в книге другой пример умножения (рис. 2).

Деление в столбик по методу Брунетти, как и обычное, сводится к последовательному подбору очередной цифры, умножению на нее и вычитанию. Вот пример деления 642 на 21:

$$\begin{array}{r} 853 \\ 92 \\ \hline 964 \\ 631, \\ \hline 631,964 \end{array}$$

Рис. 2

- 64 при делении на 21 дает цифру 4;
- учитывая, что $21 \times 4 = 84$, вычитаем $84 - 54 = 30$;
- сносим 2 – получаем 52, которое при делении на 21 дает 3 ($4 -$ не подходит);
- $21 \times 3 = 63$;
- $52 - 63 = -11$;
- деление 32 на 21 дает последнюю цифру 2, т.е. все частное равно 432 (проверьте, поделив эти числа в десятичной системе).

В заключение заметим, что для Брунетти, как и для других ученых, описывавших двоичную систему счисления до него, эта система была абстрактным объектом исследования, не имеющим практического значения.

Капли тумана в луче света

О.ПТУШЕНКО, В.ПТУШЕНКО

Взаимодействие – это фундаментальное понятие физики. Взаимодействиями вызваны все процессы в нашем мире (кроме, разве что, равномерного прямолинейного движения) – от распадов элементарных частиц до круговорота воды в природе. Кроме того, взаимодействия играют познавательную (гносеологическую) роль: любой объект мы видим или слышим, или обнаруживаем за счет того, что он с чем-то взаимодействует. Частица, которая ни с чем не взаимодействует, была бы в принципе необнаруживаемой. Вспомним, какие сложности возникали на пути регистрации нейтрино, которое чрезвычайно слабо взаимодействует с веществом.

Впрочем, нет необходимости забираться в такие «фундаментальные выси» и разбираться в сложнейшей экспериментальной технике, чтобы оценить истинную ценность взаимодействия. Один из самых ярких примеров – и в прямом, и в переносном смысле этого слова – это взаимодействие света со взвешенными в воздухе частицами, пылинками или каплями тумана, которые рассеивают свет и делают его распространение в среде видимым, как бы «проявляют» пути

света. Но роль такого взаимодействия – обоюдная: как взвешенные частицы позволяют обнаружить луч света, так и рассеиваемый на частицах свет делает их видимыми. Если концентрация частиц не очень велика и если мы можем подобрать подходящий пространственный и временной масштабы съемки, то можно проследить за судьбой каждой из частиц, которые превращаются в луче света в светящиеся точки.

На рисунке 1 (а также на 4-й странице обложки журнала) приведена фотография, сделанная в туманный вечер с 60-миллисекундной выдержкой. Приглядитесь: несмотря на обилие микроскопических капелек в кадре, видны траектории отдельных капелек! Причем траектории эти имеют примерно одинаковую длину и направление, что говорит о движении той массы воздуха, в которой эти капельки взвешены. Можно оценить и скорость этого движения – она порядка десятка сантиметров в секунду. На фоне общего движения воздушной массы видны и вариации в индивидуальных движениях капелек. Можно получить и представление о том, как меняется величина скорости или направление воздушного потока за секунды, сделав два кадра подряд. Как видно из рисунка 1, в нашем случае (когда интервал между съемками составлял одну секунду) это изменение было незначительным.

Конечно, в таком способе изучения движения частиц есть и много подводных камней. Например, по фотографии сложно оценить положение частицы по оси, перпендикуляр-