Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Панов, Квадратичные отображения в картинках (окончание),
Квант, 2018, номер 8, 12–16

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20180802>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает,
что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 17:04:27

Квадратичные отображения в картинках

П. ПАНОВ

Бифуркационная диаграмма

Не так уж просто разобраться в многообразии типов долгосрочного поведения, которое демонстрирует квадратичное семейство $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$. Но существует удобный способ одновременного представления динамики семейства f_λ на одной картинке – это *бифуркационная диаграмма*.

Возьмем диапазон изменения λ , в нашем случае отрезок $[0; 4]$, и равномерно расположим на нем большое количество точек $\lambda_i = 4i/I$, $i = 0, \dots, I$. Для каждого i случайным образом выберем начальную точку $x_0 \in [0; 1]$ и произведем большое количество N итераций

$$x_{n+1} = \lambda_i x_n (1 - x_n).$$

Затем на координатной плоскости отметим точки $(\lambda_i; x_n)$, где n меняется от 100 до N . Все они будут лежать на одном вертикальном отрезке с абсциссой λ_i . Обратите внимание, поскольку нас интересует установившееся (долгосрочное) поведение точек x_n , первые 100 из них были отброшены. Проделаем это для каждого i .

Полученная таким образом бифуркационная диаграмма изображена на рисунке 3 ($0 \leq \lambda \leq 4$). Тут можно четко различить те типы поведения, которые мы зафиксировали раньше. Например, то, что при $0 \leq \lambda \leq 1$ точки x_n стремятся к 0, а при $1 < \lambda \leq 3$ – к некоторому ненулевому значению, а именно к корню $x_\lambda = (1-\lambda)/\lambda$. Видно появление цикла длины 2 при переходе λ через значение 3, а также виден цикл длины 4 при $\lambda = 3,5$. Для тех λ_i , для которых заполнены целые отрезки, харак-

Рис. 3

терна хаотическая динамика. Где-то в районе $\lambda = 3,8$ наблюдается цикл длины 3. Разглядывая бифуркационную диаграмму при большем увеличении, можно обнаружить другие подробности.

Мы не можем продвинуться вдоль бифуркационной диаграммы в сторону значений $\lambda > 4$, так как там при итерациях точки начинают уходить на бесконечность, но продвижение в сторону отрицательных значений возможно (рис.4; $-2 \leq \lambda \leq 4$).

Рис. 4

Дальше мы попробуем расширить диапазон изменения параметра λ «вправо», научившись работать с точками, уходящими при итерациях на бесконечность, и

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20180802>

Окончание. Начало – в предыдущем номере журнала.

построим новые бифуркационные диаграммы.

Квадратичные отображения плоскости и отображения окружности, семейства и диаграммы

Квадратичным отображением плоскости назовем преобразование, при котором точка с координатами $(x; y)$ переходит в точку $A(x; y)$ с координатами

$$A(x; y) = (a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2; a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2),$$

где a_i – некоторые фиксированные числа. Дальше при задании квадратичного отображения $A(x; y)$ мы иногда будем пользоваться короткой записью $A(a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6)$, оставляя лишь его коэффициенты a_i .

С каждым преобразованием плоскости $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ можно связать преобразование окружности, которое на координатном языке выглядит как

$$(x; y) \mapsto \frac{A(x; y)}{|A(x; y)|}.$$

Здесь $(x; y)$ – точка на единичной окружности (т.е. $x^2 + y^2 = 1$). Результат применения к ней преобразования, $A(x; y)$, делится на расстояние до начала координат (*нормируется*), и новая точка возвращается на единичную окружность.

Итак, преобразование плоскости $A(x; y)$ порождает преобразование окружности, и мы можем наблюдать его динамику, как это делали раньше для отрезка. Но давайте сразу перейдем к семействам и к их бифуркационным диаграммам.

Пусть имеются два квадратичных отображения A и B . Они порождают естественное семейство квадратичных отображений

$$C_\lambda = \lambda A + B, \quad -\infty < \lambda < \infty.$$

Чтобы избавиться от бесконечного диапазона изменения λ , сделаем еще замену $\lambda = \sin \theta / \cos \theta$ и распределим $\sin \theta$ и $\cos \theta$ между A и B :

$$C_\theta = A \sin \theta + B \cos \theta, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi.$$

Вот для таких семейств мы и построим сейчас несколько бифуркационных диаграмм. Первая из них, для семейства, порожденного $A = (-0,43; 0,06; 0,67; -0,53; -0,54; -0,47)$ и $B = (-0,57; 1,32; -0,29; 0; -0,94; -0,34)$, изображена на рисунке 5.

Рис. 5

На этом рисунке, как и на следующих, вдоль горизонтали откладывается параметр $-\pi \leq \theta \leq \pi$, а вдоль вертикали – угловые координаты $-\pi \leq \phi \leq \pi$ точек окружности, с которых стартует итерация (угловая координата ϕ – это угол между осью x и направлением на точку окружности).

На рисунке 5 опять наблюдаются бифуркации удвоения периода, видно периодическое и хаотическое поведение.

На окружности углом, отличающимся друг от друга на 2π , отвечает одна и та же точка, поэтому мы можем отождествить вертикальные стороны граничного квадрата, соответствующие углам $\theta = \pm\pi$. Точно так же можно отождествить и горизонтальные стороны, соответствующие $\phi = \pm\pi$. Но на рисунке 5 имеется и еще одна дополнительная симметрия, которая заключается в том, что бифуркационная диаграмма переходит сама в себя при сдвиге на векторы $(\pi/2; \pm\pi/2)$. Это следствие квадратичности отображений A и B .

На рисунке 6 ($A = (-0,67; 0; 0,63; 0,07; 0,14; 0,73)$ и $B = (0,58; 0,86; -0,01; -0,52; -0,08; -0,2)$) мы видим новые элементы –

Рис. 6

вертикальные полосы. Они соответствуют тем значениям параметра θ , для которых при отображении $C_\theta = A \sin \theta + B \cos \theta$ единичная окружность дважды наматывается сама на себя.

На рисунке 7 ($A = (0,41; -1,12; 0,2; 1,06; 0,94; 0,48)$ и $B = (0,86; -0,01; 1,07; 0; 0,22; 0,14)$) – еще одна бифуркационная диа-

Рис. 7

грамма, на этот раз без какой бы то ни было хаотической компоненты. В наличии только неподвижные точки, циклы длины 2 и 4.

И наконец, возвращаемся к логистическому семейству. Оказывается, что оно напрямую связано с семейством, порожденным квадратичными отображениями

$$A(x; y) = (0; xy - y^2) \text{ и } B(x; y) = (x^2; 0).$$

Соответствующая диаграмма изображена

на рисунке 8 ($A = (0; 0; 0; 0; 1; -1)$ и $B = (1; 0; 0; 0; 0; 0)$). Сравнение с рисунками 3 и 4 показывает, что в центре рисунка 8 фактически присутствует логистическая бифуркационная диаграмма.

Рис. 8

Переход от координат θ, φ к координатам $x = \tan \theta, y = \tan \varphi$ дает точное соответствие между центральной частью рисунка 8 и рисунком 4.

Отображения сферы

Тот самый фокус по превращению квадратичного преобразования плоскости в преобразование окружности мы повторим для пространства и сферы.

Квадратичным отображением трехмерного пространства назовем отображение $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ вида

$$\begin{aligned} A(x; y; z) = & (a_1x^2 + a_2xy + a_3xz + a_4y^2 + a_5yz + a_6z^2; \\ & a_7x^2 + a_8xy + a_9xz + a_{10}y^2 + a_{11}yz + a_{12}z^2; \\ & a_{13}x^2 + a_{14}xy + a_{15}xz + a_{16}y^2 + a_{17}yz + a_{18}z^2). \end{aligned}$$

Пусть точка $(x; y; z)$ лежит на единичной сфере с центром в начале координат, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Тогда точка $A(x; y; z)/|A(x; y; z)|$ тоже лежит этой сфере, и мы получаем отображение единичной сферы в себя:

$$(x; y; z) \mapsto \frac{A(x; y; z)}{|A(x; y; z)|}.$$

Опять можно взять точку на сфере и посмотреть, что с ней происходит при многократном применении этого отображения, т.е. проследить за динамикой точек $(x_n; y_n; z_n)$.

Ограничимся одним примером. Рассмотрим квадратичное преобразование A , показанное на рисунке 9.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0879 & 0,9162 & 1,0522 & -0,1219 & 0,0408 & -1,0186 \\ 0,5917 & -0,0210 & -0,3582 & 0,4880 & -0,6976 & -0,4976 \\ -0,5585 & 0,4328 & 0,1542 & -1,0366 & 0,6024 & -0,1356 \end{pmatrix}.$$

Рис. 9

Рисунок 10, напоминающий танцующую пару рыб, получен в результате 450000 итераций отображения единичной сферы,

Рис. 10

порожденного A . Каждая из последовательно полученных точек сферы $(x_n; y_n; z_n)$ была спроецирована на плоскость: $(x_n; y_n; z_n) \mapsto (x_n; y_n)$. Все точки $(x_n; y_n)$ лежат внутри единичного круга.

Закключение

Итак, на нескольких примерах мы увидели, что системы с очень простым описанием могут демонстрировать весьма нетривиальное поведение и «рисовать» сложные и красивые изображения со множеством деталей. Разумеется, в этой статье приведено лишь небольшое число таких картинок. Некоторое усложнение таких систем позволяет, например, рисовать *фракталы* – изображения, малые части которых, будучи рассмотрены под увели-

чительным стеклом, повторяют все изображение.⁴

В заключение скажем, что исследование поведения последовательности x_n в методе простых итераций $(x_{n+1} = f(x_n))$ служит не только для создания эстетически приятных рисунков. Даже если мы оказа-

лись в ситуации, когда этот метод не сходится к точному решению уравнения $f(x) = x$, бывает важно понять, что все-таки происходит.

Один из примеров такой задачи, проходящей из экономики, связан с *паутинообразной моделью ценообразования*.⁵ Вкратце, речь идет вот о чем. В капиталистическом обществе цены устанавливаются самими участниками рынка. Начнем с действующих в данное время цен x_0 . Исходя из этих цен, производители и продавцы товаров стараются оптимизировать свою деятельность, после чего цены, выставляемые ими на товары, меняются: $x_1 = f(x_0)$, и этот процесс продолжается дальше: $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, ...⁶ В «хорошем» случае итерационный процесс сойдется к уровню цен x , удовлетворяющему уравнению $x = f(x)$. Такие цены называются *равновесными*: даже если они кому-то покажутся несправедливыми, ни одному из участников рынка не выгодно их менять.

⁴ О том, как поведение динамических систем порождает фракталы, см. в книге: Х.О.Пайтген, П.Х.Рихтер. Красота фракталов. – М.: Мир, 1993.

⁵ Более подробно см., например: В.М.Гальперин, С.М.Игнатьев, В.И.Моргунов. Микроэкономика. – СПб.: Экономическая школа, 2004.

⁶ Для простоты модели мы предполагаем, что экономическая деятельность осуществляется дискретно, по шагам, как в некоторых компьютерных играх-стратегиях.

В реальности, как мы видели в этой статье, так происходит не всегда, даже если наша экономическая модель (т.е. функция f) описана простой и понятной формулой. Может возникнуть и периодическое, и хаотическое поведение.

Более классические примеры связаны с динамическими системами в механике. Уравнения, описывающие поведение ме-

ханических систем, довольно простые (грубо говоря, они получаются из законов Ньютона), однако поведение может оказаться очень сложным. Основы теории динамических систем заложил выдающийся французский математик А. Пуанкаре; впоследствии большой вклад в нее внесли А.Н. Колмогоров, В.И. Арнольд и другие.

НАМ ПИШУТ

Сечение с наименьшей площадью

В последних номерах «Кванта» было опубликовано несколько статей под общим заглавием «Где ошибка?». Нам кажется очень важным и полезным тренироваться отличать правильные рассуждения от правдоподобных. Продолжая эту тему, наш постоянный автор и читатель С. Дворянинов предлагает протестировать на правильность решение следующей задачи.

Задача. Координаты вершин треугольной пирамиды $TABC$ таковы:

$$T(2;1;0), A(0;0;1), B(1;1;0), C(0;0;2).$$

Пусть S – это площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания AC и пересекающей боковое ребро TB . Найдите наименьшее значение величины S .

Решение. Рассмотрим сечение AMC (см. рисунок). Пусть MK – высота треугольника

AMC . Площадь треугольника окажется наименьшей, когда будет наименьшей длина отрезка MK . В свою очередь, эта длина является наименьшей из всех возможных, если она равна расстоянию между скрещивающимися прямыми AC и TB . Найдём это расстояние.

Прямая AC задается уравнениями $x = 0$, $y = 0$, $z = t$, прямая TB задается уравнениями $x = s$, $y = 1$, $z = 0$. Квадрат расстояния между точками этих двух прямых равен

$$d^2 = s^2 + 1^2 + t^2 \geq 1.$$

Равенство достигается при $s = 0$ и $t = 0$. Отсюда следует, что расстояние между прямыми AC и TB равно 1. Длина ребра AC тоже равна 1. Следовательно, наименьшее значение S равно $\frac{1}{2}$.

Все ли верно в этом решении?

В приведенном рассуждении имеется пробо́л, связанный с тем, что одно из оснований общего перпендикуляра к прямым AC и TB может находиться не на отрезке TB , а на его продолжении. Можно проверить, что при данных в условии задачи числовых значениях именно так и происходит.