Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Копылов, Плюсы-минусы и игра Ним (окончание), *Квант*, 2018, номер 8, 34–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20180805>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 16:09:58

Плюсы-минусы и игра Ним

И. КОПЫЛОВ

Исследование функции F

Напомним, что через $F(a, b)$ мы условились обозначать то единственное значение c , для которого кучки из a, b, c камней образуют в игре Ним «минусовое» состояние. Исследуем некоторые закономерности. Для начала изучим четность значений функции F . На рисунке 3 приведена таблица значений функции F , в которой цветом выделены все

Количество камней во второй кучке	10	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0
9	9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	
8	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	
7	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	
6	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	
5	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	
4	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	
3	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	
2	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	
1	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Рис. 3
Количество камней в первой кучке

клетки с нечетными значениями $c = F(a, b)$, а также нечетными a, b (по краям таблицы). Бросается в глаза, что клетки с нечетными значениями функции $F(a, b)$ располагаются в шахматном порядке. Замечаем также, что в тройке чисел a, b и c нечетных чисел либо 0, либо 2, т.е. всегда четное количество.

Таким образом, у нас появилась правдоподобная гипотеза о том, как определять четность числа $c = F(a, b)$ по четности чисел a и b . Пойдем далее, вычтем из всех нечетных

чисел на рисунке 3 по единице. Все числа станут четными. Разделим их на 2 и проследим, какие числа теперь окажутся нечетными. Видно, что выделенные на рисунке 4 клетки располагаются в шахматном поряд-

Количество камней во второй кучке	5	5	5	4	4	7	7	6	6	1	1	0
4	4	4	5	5	6	6	7	7	0	0	1	
4	4	4	5	5	6	6	7	7	0	0	1	
3	3	3	2	2	1	1	0	0	7	7	6	
3	3	3	2	2	1	1	0	0	7	7	6	
2	2	2	3	3	0	0	1	1	6	6	7	
2	2	2	3	3	0	0	1	1	6	6	7	
1	1	1	0	0	3	3	2	2	5	5	4	
1	1	1	0	0	3	3	2	2	5	5	4	
0	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	
0	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	
	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	

Рис. 4
Количество камней в первой кучке

ке, но теперь каждую клетку образуют 4 числа. И опять наблюдаем, что четность числа $c = F(a, b)$ в таблице определяется четностью чисел a и b . Если четность чисел a и b совпадает, то c четно, а если четности у a и b различные, то c нечетно. Как и раньше, в тройке чисел a, b и c нечетных чисел всегда четное количество.

Сделаем аналогичное преобразование с числами таблицы на рисунке 4 еще раз. Вычтем из нечетных чисел по 1 и, получив в таблице все четные числа, разделим их на 2. Снова цветом выделим все нечетные числа в полученной таблице (рис.5). Наблюдаем шахматную раскраску, размер клеток в которой стал еще в 2 раза больше, и аналогичные свойства четности для тройки чисел a, b и $c = F(a, b)$: среди чисел a, b и c четное количество нечетных.

Проводимые операции с числами – вычитание единицы, если число нечетно, и деление на два – это в точности исключение последней цифры из двоичной записи числа. Наблюдаемые нами свойства чисел в таблице значений функции F говорят о том, что, просуммировав в каждом из трех младших разрядов двоичной записи чисел a, b и $c = F(a, b)$ количество единиц, получим четное число. Обобщим это соображение и сформулируем его в виде леммы.

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20180805>

Окончание. Начало – в предыдущем номере журнала.

Количество камней во второй кучке	2	2	2	2	2	3	3	3	3	0	0	0
	2	2	2	2	2	3	3	3	3	0	0	0
	2	2	2	2	2	3	3	3	3	0	0	0
	1	1	1	1	1	0	0	0	0	3	3	3
	1	1	1	1	1	0	0	0	0	3	3	3
	1	1	1	1	1	0	0	0	0	3	3	3
	1	1	1	1	1	0	0	0	0	3	3	3
	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2
	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2
	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2
	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2
	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2

Рис. 5 Количество камней в первой кучке

Лемма 2. Если в каждом разряде двоичной записи чисел a , b и c суммарно содержится четное количество единиц, то выполняется соотношение $c = F(a, b)$.

Например, в двоичной записи тройки чисел 3, 9, 10 суммарно в каждом отдельном разряде количество единиц равно 0 или 2, т.е. четно (рис.6). Тогда, согласно лемме 2, выполняется соотношение $10 = F(3, 9)$.

3:	1 1			
9:	1	0	0	1
10:	1	0	1	0
Количество единиц в разряде:	2	0	2	2

Рис. 6

Перед доказательством леммы 2 напомним, что если три числа a , b и c связаны соотношением $c = F(a, b)$, то состоянию (a, b, c) в игре Ним с 3 кучками приписывается знак «-». Таким образом, эта лемма даст ключ к нахождению «минусовых» состояний, т.е. выигрышной стратегии, в игре Ним.

Состоянию $(0, 0, 0)$ приписан знак «-», и в каждом двоичном разряде нуля содержится нулевое (четное) количество единиц. Пусть числа a , b и c таковы, что для каждого разряда их двоичных записей суммарное количество единиц четно. Тогда если из состояния (a, b, c) в игре Ним сделать ход, то уменьшится ровно одно число из трех. Не исключая общности, считаем, что уменьши-

лось число a . Тогда хотя бы в одном из разрядов его двоичной записи единица сменится нулем. В этом-то разряде у чисел a , b и c количество единиц и станет нечетным.

Осталось доказать, что если хотя бы в одном из разрядов двоичных записей чисел a , b и c суммарное количество единиц нечетно, то уменьшением одного из этих трех чисел можно добиться того, чтобы в каждом двоичном разряде суммарно у трех чисел количество единиц стало четным.

Рассмотрим самый старший двоичный разряд, в котором суммарное количество единиц у чисел a , b и c нечетно. Хотя бы у одного из трех чисел в этом разряде двоичной записи стоит цифра 1. Пусть, для определенности, рассматриваемый разряд имеет номер k и двоичная запись числа a в k -м разряде содержит 1. Уменьшим число a . Двоичные разряды старше k -го в записи числа a оставим без изменения, в k -м разряде заменим 1 на 0. В разрядах, младших k -го, цифру в двоичной записи числа a выберем таким образом, чтобы вместе с соответствующими цифрами в двоичной записи b и c получилось четное число единиц. Доказательство леммы 2 завершено.

Лемма 2 позволяет находить число $c = F(a, b)$ по двум произвольным числам a и b . Для нахождения двоичной записи числа c следует сложить поразрядно двоичные записи чисел a и b . Если единиц в разряде у a и b вместе окажется 0 или 2, то в соответствующем разряде числа c ставим цифру 0, а если единица всего одна, то ставим цифру 1. Например, складывая указанным способом двоичные записи чисел 11 и 23 (в двоичной системе 1101 и 10111), получаем двоичную запись числа 26 (в двоичной системе 11010), как показано на рисунке 7.

a	11:	1	1	0	1
b	23:	1	0	1	1
$c = F(a, b)$	26:	1	1	0	1

Рис.7

Лемма 1 и лемма 2 дают удобный алгоритм для определения минусовых состояний в игре Ним с 3 кучками камней. Операцию получения числа $c = F(a, b)$ по числам a и b будем называть *Ним-суммированием* и обо-

значать знаком $\oplus$:

$$c = a \oplus b.$$

Стратегия игры Ним с произвольным количеством кучек

Приведенные выше две леммы легко обобщаются на случай с m кучками. В формулировках и доказательствах лемм число 3 заменяется на m , а число 2 – на $m - 1$. Для того чтобы определить, какой знак («+» или «-») приписан состоянию с $a_1, a_2, \dots, a_m$ камнями, следует представить числа $a_1, a_2, \dots, a_m$ в двоичной системе счисления, записать их столбиком и найти поразрядную сумму. Если в разряде количество единиц четно, то в результирующей сумме в соответствующем разряде следует поставить цифру 0, а если количество единиц в разряде оказалось нечетным, то соответствующий двоичный разряд суммы следует заполнить цифрой 1. Другими словами, пользуясь введенной ранее операцией Ним-суммирования, следует вычислить Ним-сумму слагаемых $a_1, a_2, \dots, a_m$:

$$S_m = a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_m.$$

Если Ним-сумма S_m окажется нулевой, т.е. содержащей нули во всех двоичных разрядах, то состоянию $a_1, a_2, \dots, a_m$ следует приписать знак «-», иначе – знак «+». Для гарантированного выигрыша игрок после каждого своего хода должен оставлять минусовое состояние («Ставь на минус!»).

Приведем пример хода по стратегии. Пусть $m = 7$ и в кучках находятся 5, 9, 6, 4, 6, 3 и 12 камней. Тогда Ним-сумма вычисляется так, как показано на рисунке 8, и равна 7 (в двоичной записи 111).

Старшим ненулевым разрядом Ним-суммы является второй (нумерацию разрядов, как обычно, ведем справа налево, самый младший разряд – нулевой). Пять из семи слагаемых во втором двоичном разряде содержат 1. Выберем, например, первое слагаемое, равное 5, и уменьшим его: в разряде 2 единицу заменим на 0, в разряде 1 единиц у остальных слагаемых равно 3, т.е. нечетно, поэтому во втором разряде ставим 1, в нулевом разряде у всех остальных слагаемых 2 единицы, поэтому ставим 0. В результате число $5 = 101_2$ превратится в число $10_2 = 2$. Следовательно, в рассматриваемом примере для обнуления Ним-суммы достаточно из

Кучка 1	5:	1	1	0	1
Кучка 2	9:		0	0	1
Кучка 3	6:		1	1	0
Кучка 4	4:		1	0	0
Кучка 5	6:		1	1	0
Кучка 6	3:			1	1
Кучка 7	12:		1	1	0
Ним-сумма:		0	1	1	1

Рис. 8

кучки с 5 камнями забрать 3 и оставить 2 камня.

Сделаем два заключительных замечания. Если Ним-сумма для m кучек отлична от 0, то добавим к ним $(m + 1)$ -ю кучку, количество камней в которой возьмем равным Ним-сумме для m кучек. Тогда Ним-сумма для $m + 1$ кучек равна 0. В рассматриваемом примере при добавлении восьмой кучки, в которой $111_2 = 7$ камней, получится минусовое состояние игры Ним с 8 кучками.

Результат Ним-суммирования зависит только от четности суммарного количества единиц в каждом разряде у всех слагаемых. Ним-сумма не изменится при произвольной перестановке слагаемых и расстановке скобок.

Упражнения

Предлагаем читателю подумать, как изменится изложенная стратегия Нима при модификациях игры, приведенных в следующих упражнениях.

1. Игра ведется по правилам Нима, но, напротив, проигрывает игрок, взявший из кучек последний камень.

2. Имеется m кучек камней, количество камней в них равно числам $a_1, a_2, \dots, a_m$. Два игрока ходят по очереди. Каждый игрок при своем ходе выбирает одну из кучек и берет из нее любое ненулевое количество камней, не большее некоторого фиксированного числа k . Игрок, забравший последний камень, считается победителем.

3. Имеется m кучек камней, количество камней в них равно числам $a_1, a_2, \dots, a_m$. Два игрока ходят по очереди. Каждый игрок при своем ходе выбирает одну или две кучки и берет из них камни. Из каждой из выбранных кучек разрешается взять любое ненулевое количество камней. Игрок, забравший последний камень, считается победителем.