Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Петрунин, Сколько деревьев в графе, *Квант*, 2018, номер 9, 9–13

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20180902>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 15:41:38

Сколько деревьев в графе

А. ПЕТРУНИН

Графы и их остовные деревья

Рассмотрим план шести ежедневных рейсов некоторой авиакомпании между некоторыми парами из аэропортов a , b , c и d , показанный на рисунке 1. Для формализа-

Рис. 1

ции такой и многих других ситуаций в математике используется понятие *граф*.

Граф — это конечный и не пустой набор *вершин* и конечный набор *ребер*, каждое из которых соединяет пару вершин. В нашем примере вершина графа — это аэропорт, а ребро — это рейс авиакомпании. Пара вершин графа может быть соединена несколькими ребрами (это может означать, что авиакомпания совершает несколько рейсов в день). Также ребро может соединять вершину с самой собой; в этом случае оно называется *петлей* (про такое ребро можно думать, как про прогулочный рейс авиакомпании).

Иначе говоря, с математической точки зрения, на рисунке 1 мы видим граф с четырьмя вершинами a , b , c и d , шестью ребрами, из них одно ребро — петля при вершине c и пара ребер соединяет b с d . Число ребер, исходящих из данной вершины, называется ее *степенью*, при этом петли считаются дважды; степени вершин a , b , c и d — 1, 4, 4 и 3 соответственно.

Изображенный граф является *связным*, т.е. из любой его вершины можно пройти в любую другую, пройдя по нескольким его ребрам.

Предположим, нам требуется сократить число ребер связного графа, сохранив его связность. Нетрудно видеть, что это мож-

но сделать тогда и только тогда, когда граф содержит *цикл*.

Цикл — это маршрут, составленный из различных ребер, обходящий несколько вершин без повторений и возвращающийся в исходную вершину. Число ребер в цикле называется *длиной* цикла. Например, в нашем графе есть два цикла длины три с вершинами b , c и d , один цикл длины два с вершинами b и d , а также петля при вершине c образует цикл длины один.

Действительно, если из любого цикла связного графа выбросить любое ребро, то граф останется связным. Более того, если после удаления некоторого ребра граф остался связным, то это ребро принадлежало некоторому циклу — этот цикл образован самим ребром и кратчайшим путем между его концами в оставшемся графе.

Удаление ребра из цикла можно повторять, пока мы не придем к графу без цикла. Полученный граф называется *остовным деревом* исходного графа.

Вообще говоря, связный граф без циклов называется *деревом*. В таких графах нет петель и из любой их вершины в любую другую есть единственный путь по ребрам без повторений вершин.

На рисунке 2 вы видите все пять различных остовных деревьев нашего исходного графа.

Рис. 2

Число остовных деревьев в данном графе Γ мы будем обозначать $\tau(\Gamma)$. Например, если Γ — это граф, рассмотренный выше, то $\tau(\Gamma) = 5$.

Чтобы проверить понимание данных определений, мы советуем решить следую-

щие два стандартных упражнения про деревья.

Упражнения

1. Докажите, что если дерево имеет хотя бы две вершины, то в нем найдется вершина степени 1.

2. Докажите, что число ребер в любом дереве на единицу меньше числа его вершин. Воспользуйтесь индукцией по числу вершин и предыдущим упражнением.

В частности, из упражнения 2 следует, что независимо от выбора ребер число удаленных ребер в процедуре получения остова из графа, описанной выше, – одно и то же. (Для связного графа Γ это число называют его *первым числом Бэтти*; оно обычно обозначается $\beta_1(\Gamma)$.)

Ребро связного графа называется *мостом*, если удаление этого ребра из графа делает граф несвязным; такой граф разбивается на два связных графа, называемые его *островами* (рис.3).

Упражнение 3. Пусть граф Γ содержит мост между островами Δ_1 и Δ_2 . Докажите, что

$$\tau(\Gamma) = \tau(\Delta_1) \cdot \tau(\Delta_2).$$

Удаление-плюс-стягивание

Пусть ρ есть ребро в графе Γ . Обозначим через $\Gamma \setminus \rho$ граф, полученный из Γ удалением ребра ρ , и через Γ/ρ – граф, полученный из Γ стягиванием ребра ρ в точку (рис.4).

Рис. 4

Если ребро ρ не является петлей, тогда выполняется следующее соотношение:

$$\tau(\Gamma) = \tau(\Gamma \setminus \rho) + \tau(\Gamma/\rho), \quad (*)$$

которое мы будем называть *удаление-плюс-стягивание*.

Действительно, остовные деревья в Γ можно разделить на две категории – те, что содержат ребро ρ , и те, что его не содержат. Для деревьев из первой категории стягивание ребра ρ в точку дает остовное дерево в Γ/ρ , а деревья второй категории являются также остовными деревьями в графе $\Gamma \setminus \rho$. Более того, оба этих соответствия взаимно однозначны. Отсюда вытекает формула (*).

Например, если Γ – это первый пример и ρ есть ребро между вершинами b и c , тогда первые два остовных дерева на рисунке 2 соответствуют дереву в $\Gamma \setminus \rho$, а последние два соответствуют дереву в Γ/ρ .

Формулу (*) удобно записывать схематически, как показано на рисунке 4. На графе Γ ребро ρ , для которого применяется формула, перечеркнуто.

Заметим, что никакое остовное дерево не содержит петлю. Поэтому можно удалить все петли из графа, и число его остовных деревьев останется неизменным. Иначе говоря, для любой петли ρ выполняется равенство

$$\tau(\Gamma) = \tau(\Gamma \setminus \rho).$$

Из формулы *удаление-плюс-стягивание* можно вывести несколько других полезных соотношений. Например, если в графе Γ есть концевая вершина w (т.е. вершина степени 1), то w и единственное ребро при w можно удалить и в полученном графе $\Gamma \setminus w$ число его остовных графов не изменится, т.е.

$$\tau(\Gamma) = \tau(\Gamma \setminus w).$$

Действительно, обозначим через ρ единственное ребро при w . Заметим, что граф $\Gamma \setminus \rho$ несвязен, поскольку вершина w не имеет ребер, и, значит, $\tau(\Gamma \setminus \rho) = 0$. С другой стороны, $\Gamma/\rho = \Gamma \setminus w$, откуда и получаем наше равенство.

На схемах двусторонняя стрелка « $\leftrightarrow$ » будет означать, что соответствующие графы имеют то же число остовных деревьев;

Рис. 5

например, из выведенных соотношений можно получить следующую диаграмму (рис.5), означающую, в частности, что $\tau(\Gamma) = 2 \cdot \tau(\Delta)$.

Равенства, описанные выше, дают алгоритм вычисления $\tau(\Gamma)$. Действительно, для любого ребра ρ оба графа $\Gamma \setminus \rho$ и Γ/ρ имеют меньшее число ребер. Таким образом, *удаление-плюс-стягивание* сводит нахождение числа остовных деревьев Γ к нахождению числа остовных деревьев более простых графов.

Деревья в веерах

Графы следующего вида (рис.6) называются *веерами*; веер с $n + 1$ вершиной будет обозначаться Θ_n .

Рис. 6

Применив соотношения, полученные в предыдущем разделе, мы можем составить бесконечную схему, показанную на рисунке 7. В дополнение к веерам Θ_n в схеме участвуют их вариации Θ'_n , отличающие-

Рис. 7

ся от Θ_n дополнительным ребром. При возникновении петель или концевых вершин мы их тут же удаляем.

Введем обозначения $a_n = \tau(\Theta_n)$ и $a'_n = \tau(\Theta'_n)$. Из схемы легко вывести два рекуррентных соотношения:

$$a_{n+1} = a'_n + a_n,$$

$$a'_n = a_n + a'_{n-1}.$$

Таким образом, в последовательности чисел $a_1, a'_1, a_2, a'_2, a_3, \dots$ каждое следующее является суммой двух предыдущих.

Напомним, что последовательность *чисел Фибоначчи* F_n задается тем же соотношением $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ с $F_1 = F_2 = 1$. Она начинается так:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

Далее заметим, что Θ_1 – это две вершины, соединенные единственным ребром, а Θ'_1 – это две вершины, соединенные двойным ребром. Отсюда $a_1 = 1 = F_2$ и $a'_1 = 2 = F_3$, а значит,

$$a_n = F_{2n}$$

для любого n .

Можно также вывести рекуррентное соотношение на a_n без использования a'_n :

$$a_{n+1} = a'_n + a_n = 2a_n + a'_{n-1} = 3a_n - a_{n-1}.$$

Последовательности, для которых выполняется подобное соотношение, называются *линейными рекуррентными последовательностями*. Для такой последовательности можно найти формулу для ее общего члена. В нашем случае

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Этот процесс подробно описан в книжке [4], которую мы рекомендуем читателю.

Поскольку $0 < \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^n < 1$ для всех n , эту формулу можно записать короче:

$$a_n = \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^n \right],$$

где $[x]$ обозначает целую часть числа x .

Для закрепления материала советуем разобрать следующие упражнения.

Упражнения

4. Рассмотрим последовательность графов Δ_n следующего типа (рис.8):

Рис. 8

Докажите, что $\tau(\Delta_n) = \tau(\Theta_n)$, а значит, $\tau(\Delta_n) = F_{2n}$ для любого n .

5. Пусть b_n обозначает число остовных деревьев в *лестнице* Λ_n с n ступеньками в последовательности графов следующего типа (рис.9):

Рис. 9

Воспользуйтесь разработанным методом и докажите, что последовательность b_n удовлетворяет соотношению

$$b_{n+1} = 4b_n - b_{n-1}.$$

(Заметим, что $b_1 = 1$ и $b_2 = 4$; отсюда можно быстро посчитать первые члены последовательности:

1, 4, 15, 56, 209, 780, 2911, ...)

Вам потребуются еще пара последовательностей графов Λ'_n и Λ''_n , показанных на рисунке 10.

Рис. 10

Продвинутое упражнение 6. Колесами называются графы Φ_n следующего типа (рис.11):

Рис. 11

Докажите, что последовательность $c_n = \tau(\Phi_n)$ удовлетворяет такой рекуррентной формуле:

$$c_{n+1} = 4c_n - 4c_{n-1} + c_{n-2}.$$

Замечание. Проще вывести соотношение

$$c_{n+1} - a_{n+1} = c_n + a_n.$$

Зная, что $c_1 = 1$, $c_2 = 5$, последнее равенство позволяет получить выражение для c_n :

$$c_n = F_{2n+1} + F_{2n-1} - 2 = L_{2n} - 2;$$

здесь $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$; эта последовательность называется *числами Люка*. Как и числа Фибоначчи, числа Люка часто появляются в различных комбинаторных задачах.

Заключительные замечания

Подсчет числа остовных деревьев связан с расчетом электрических цепей. Предположим, граф Γ описывает электрическую цепь, в которой каждое ребро – это сопротивление в один ом, источник питания подключен к вершинам a и b и I есть общий ток в цепи, измеренный в амперах. Нам надо посчитать ток через одно из сопротивлений.

Пусть ρ есть ребро Γ с выбранным направлением. Заметим, что все остовные деревья Γ можно разделить на три типа: (1) те, в которых на пути из a в b ребро ρ появляется с положительной ориентацией; (2) те, в которых на пути из a в b ребро ρ появляется с отрицательной ориентацией; (3) те, в которых на пути из a в b ребро ρ не появляется. Обозначим через τ_+ , τ_- и τ_0 число деревьев в этих трех категориях. Очевидно, что $\tau(\Gamma) = \tau_+ + \tau_- + \tau_0$.

Силу тока I_ρ вдоль ρ можно вычислить по следующей формуле:

$$I_\rho = \frac{\tau_+ - \tau_-}{\tau(\Gamma)} \cdot I.$$

Доказательство получается прямой проверкой правил Кирхгофа для значений токов, полученных по этой формуле, для всех ребер в Γ .

Есть множество других примеров использования правил Кирхгофа в теории графов. Например, в [7] они используются в физическом доказательстве формулы Эйлера

$$B - P + \Gamma = 2,$$

где B , P и G обозначают число вершин, ребер и граней многогранника соответственно.

Формула *удаление-плюс-стягивание* применялась при решении так называемой задачи о квадрировании квадрата. История этой задачи и ее замечательное решение обсуждаются в книжках [6] и [2]; идея этого решения также основана на оригинальном использовании электрических цепей.

Приведенный нами вывод рекуррентных формул для чисел остовных деревьев в веерах, лестницах и колесах дается в [8]; эта задача также обсуждается в классической книжке [3].

Существенно более сложной задачей является нахождение числа остовных деревьев в *полных* графах, т.е. таких, в которых любая пара различных вершин соединена единственным ребром. Если n обозначает число вершин полного графа, то число его остовных деревьев равно n^{n-2} . Иными словами,

$$\tau(\Pi_n) = n^{n-2}, \quad (**)$$

где Π_n обозначает полный граф с n вершинами (рис. 12).

Рис. 12

Равенство $(**)$ называется *формулой Кэли*. Наиболее известным доказательством является так называемый *код Прюфера* – способ однозначного кодирования дерева упорядоченной последовательностью из его вершин; несколькими другим доказательствам посвящена глава 30 в [1]. В расширенной версии настоящей статьи [5] приводится доказательство, основанное на формуле *удаление-плюс-стягивание*.

Для числа раскрасок вершин графа выполняется аналогичная формула: *удаление-минус-стягивание*. А именно, пусть $\chi(\Gamma, k)$ обозначает число раскрасок графа Γ в k цветов, при которых концы каждого ребра покрашены в разные цвета. Тогда

выполняется соотношение

$$\chi(\Gamma, k) = \chi(\Gamma \setminus \rho, k) - \chi(\Gamma/\rho, k).$$

Действительно, допустимые раскраски графа $\Gamma \setminus \rho$ можно разбить на две категории: (1) те, в которых концы ребра ρ покрашены в разные цвета, такие остаются допустимыми в графе Γ ; (2) те, в которых концы ребра ρ покрашены в один цвет, каждой такой раскраске соответствует единственная раскраска Γ/ρ . Отсюда – формула.

Упражнение 7. Докажите что для любого графа Γ функция $\chi(\Gamma, k)$ является многочленом с целыми коэффициентами от k ; он называется *хроматическим многочленом* графа Γ .

Подсказка. Воспользуйтесь индукцией по общему числу ребер и вершин графа и формулой *удаление-минус-стягивание*.

Литература

1. М.Айгнер, Г.Циглер. Доказательства из Книги. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2015.
2. М.Гарднер. Математические головоломки и развлечения. – М.: Оникс, 1994.
3. Д.Кнут, Р.Грэхем, О.Паташник. Конкретная математика. Математические основы информатики. – М.: Вильямс, 2009.
4. А.И.Маркушевич. Возвратные последовательности. – М.: Гостехиздат, 1950. (Популярные лекции по математике, выпуск 1.)
5. А.М.Петрунин. Сколько деревьев в графе. – arXiv:1803.03749 [math.NO].
6. И.М.Яглом. Как разрезать квадрат? – М.: Наука, 1968.
7. M.Levi. An Electrician's (or a Plumber's) Proof of Euler's Polyhedral Formula. – SIAM News, vol. 50, no.4, 2017.
8. M.H.Shirdareh Haghighi, Kh.Bibak. Recursive relations for the number of spanning trees. – Applied Mathematical Sciences, vol. 3, no.46, pp. 2263–2269, 2009.