Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Мукушев, Движение тел в гравитационном поле, *Квант*, 2018, номер 9, 29–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20180904>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 14:40:37

мым. Подобное свойство имеет место и для произвольных физических маятников.

А.Буров

Ф2524. Незаряженный плоский конденсатор емкостью C_1 расположен во внешнем однородном электрическом поле E_0 , перпендикулярном плоскостям его обкладок (см. рисунок). Расстояние между обкладками d . Конденсатор емкостью

C_2 , несущий на своих пластинах заряды $\pm q_0$ (плюс на обкладке слева), подключается к первому конденсатору. Определите заряды q_1 и q_2 на левых пластинах конденсаторов после подключения. Влиянием внешнего электрического поля в месте нахождения второго конденсатора пренебречь.

Поместим сначала на пластины второго конденсатора такие заряды $\pm q'_2$, чтобы после его подсоединения к первому конденсатору ничего не изменилось. Очевид-

но, $q'_2 = C_2 E_0 d$ (заряд на левой обкладке). Таким образом, в этом случае система зарядов не создает поля ни в одном из проводников.

Возьмем теперь два параллельно соединенных незаряженных конденсатора емкостями C_1 и C_2 и сообщим им заряд $\Delta q = q_0 - q'_2$. Он разделится пропорционально емкостям:

$$\Delta q'_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \Delta q, \quad \Delta q'_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \Delta q$$

и тоже не создаст поля ни в одном из проводников.

Накладывая эти распределения друг на друга, получаем ответ:

$$q_1 = \Delta q'_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} (q_0 - C_2 E_0 d) = C \left(\frac{q_0}{C_2} - E_0 d \right),$$

$$q_2 = q'_2 + \Delta q'_2 = C_2 E_0 d + \frac{C_2}{C_1 + C_2} (q_0 - C_2 E_0 d) = C \left(\frac{q_0}{C_1} + E_0 d \right),$$

где q_0 , q_1 и q_2 – алгебраические величины зарядов на левых обкладках конденсаторов, а $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$.

С.Крюков

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Движение тел в гравитационном поле

Б.МУКУШЕВ

ОДНИМ ИЗ ЯРКИХ ПРИМЕРОВ ДВИЖЕНИЯ в постоянном во времени однородном силовом поле является движение тела в поле тяготения вблизи Земли. Разумеется,

движение в таком поле происходит с постоянным ускорением лишь при условии, что кроме силы тяготения Земли никакие другие силы на тело не действуют. При этом считается, что линейные размеры тела малы по сравнению с радиусом Земли.

Рассмотрим движение тела, брошенного под углом α к горизонту. Траектория тела лежит в вертикальной плоскости. Введем в этой плоскости систему координат следующим образом: ось x направим горизонтально, а ось y – вертикально вверх. Запишем начальные условия движения тела в соответствии с выбранной системой координат: при $t = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$. Кроме того, проекции ускорения тела на оси x и y равны, соответственно, $a_x = 0$ и $a_y = -g$. Теперь формулы для

проекций скорости и уравнения для координат примут вид

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt, \\ x &= v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned}$$

Выражая t из первого уравнения и подставляя во второе, найдем уравнение траектории тела $y = y(x)$:

$$\begin{aligned} y &= x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = \\ &= x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha). \end{aligned} \quad (1)$$

Это уравнение описывает семейство параболических траекторий, зависящих от двух параметров: начальной скорости v_0 и угла α .

Проведем серию компьютерных экспериментов с помощью пакета прикладных программ (ППП) MathCAD. Запишем уравнение (1) на языке MathCAD:

$$Y(x) := -g \cdot \frac{x^2}{2 \cdot (v_0)^2 \cdot (\cos(\alpha))^2} + \tan(\alpha) \cdot x,$$

где α выражается в радианах. На рисунке 1 представлены результаты компьютерного

Рис. 1

эксперимента в условиях $v_0 = 5$ м/с и $\alpha_1 = 1,131$ рад, $\alpha_2 = 1,398$ рад, $\alpha_3 = 1,524$ рад.

Для более общего анализа параболического движения тел рассмотрим несколько конкретных примеров.

Пример 1. Пусть баллистический пистолет выстреливает шарики во всевозможных направлениях. Начальная скорость шариков равна v_0 . Определите границу области, которая простреливается из пистолета. Найдите поверхность, на которой расположены вершины траекторий всех шариков. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Прежде всего разберемся с таким вопросом: как следует стрелять, чтобы попасть в цель, находящуюся на расстоянии s по горизонтали и на высоте H над горизонтальной плоскостью, проходящей через пистолет? Траектория шарика проходит через точку с координатами s и H , поэтому уравнение (1) принимает вид

$$H = s \operatorname{tg} \alpha - \frac{gs^2}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha). \quad (2)$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\operatorname{tg} \alpha$, получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{gs} \left(v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g(gs^2 + 2v_0^2 H)} \right). \quad (3)$$

Исследование выражения (3) позволяет сделать следующие выводы.

1) Если дискриминант положителен, т.е. $v_0^4 - g(gs^2 + 2v_0^2 H) > 0$, то уравнение (3) имеет два различных вещественных корня. Это означает, что в этом случае в цель можно попасть по двум различным траекториям. Траектория с меньшим значением угла α называется настильной, с большим — навесной.

2) При $v_0^4 - g(gs^2 + 2v_0^2 H) < 0$ уравнение (3) не имеет вещественных корней и в цель при данном значении v_0 попасть нельзя ни при каком значении α . Иными словами, ни одна из траекторий семейства (1) не «дотягивает» до цели.

3) При равном нулю дискриминанте, когда корни совпадают, в цель можно попасть только по единственной траектории. Можно сказать также, что равенство нулю дискриминанта определяет ту минимальную начальную скорость, при которой еще можно попасть в данную цель:

$$4v_{0\min}^4 - g(gs^2 + 2v_{0\min}^2 H) = 0, \quad (4)$$

откуда

$$v_{0\min}^2 = g \left(H + \sqrt{H^2 + s^2} \right).$$

Если значение $\vartheta_{0\min}$ мы подставим в выражение (3), то получим

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{H + \sqrt{H^2 + s^2}}{s}.$$

Следовательно, чтобы попасть в цель с минимальной скоростью, ствол пистолета нужно наклонить к горизонту под углом α_0 .

Далее находим координаты точек, в каждую из которых можно попасть лишь единственным выстрелом. Перепишем соотношение (4) в ином виде, когда координата s является аргументом функции H :

$$H = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gs^2}{2v_0^2}.$$

Теперь легко получить уравнение границы простреливаемой области, если заменить координаты определенной наиболее удаленной цели s и H на переменные величины x и y – координаты точек искомой границы:

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}. \quad (5)$$

Это – уравнение параболы с вершиной с координатами $x = 0$, $y = v_0^2/(2g)$, ее ветви направлены вниз и пересекают абсциссу в точках $x = \pm v_0^2/g$.

На рисунке 2 представлены результаты компьютерного эксперимента при условии

Рис. 2

$v_0 = 5$ м/с. Найдена поверхность границы простреливаемой области, которая является параболоидом вращения параболы (5) вокруг оси y (красная линия). Найдены траектории шарика, брошенного под различными углами к горизонту (зеленные линии). Если шарик брошен под углом $\alpha = \pi/2$, то он касается найденной параболы вершиной, а другие траектории шарика касаются ее боковой точкой. В точки, расположенные вне параболоида вращения по отношению к пистолету, при данной начальной скорости попасть нельзя.

Теперь построим поверхность, на которой расположены вершины траекторий всех шариков. Вершина траектории, соответствующей начальной скорости v_0 и углу α , расположена в точке с координатами

$$x = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}, \quad y = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Исключая из этих уравнений угол α , получим

$$y^2 + \frac{x^2}{4} - \frac{v_0^2}{2g} y = 0,$$

или

$$\left(\frac{y - v_0^2/(4g)}{v_0^2/(4g)} \right)^2 + \left(\frac{x}{v_0^2/(2g)} \right)^2 = 1. \quad (6)$$

Это – уравнение эллипса, центр которого соответствует точке $\left(0; \frac{v_0^2}{4g} \right)$, малая полуось равна $\frac{v_0^2}{4g}$, большая полуось равна $\frac{v_0^2}{2g}$.

На рисунке 3 представлен график поверхности, которая является эллипсоидом вращения уравнения (6) вокруг оси y (синяя

Рис. 3

линия). Эллипсоид и параболоид вращения делят пространство на три области. Зеленым цветом выделена траектория шарика, выпущенного из пистолета со скоростью 5 м/с, когда угол его ствола с горизонтом составляет 45° . Любую неподвижную цель, находя-

Рис. 4

Рис. 5

щуюся внутри эллипсоида, можно поразить шариками как при восходящем, так и при нисходящем их движении (рис.4). В цели, расположенные между параболоидом и эллипсоидом, шарика попадают только при нисходящем полете (рис.5).

Пример 2. Необходимо поразить неподвижную цель, расположенную в точке с координатами $\left(\frac{v_0^2}{2g}; \frac{v_0^2}{4g}\right)$, где $v_0 = 5$ м/с. В нашем случае скорость шарика регулируется пистолетом от 0 до v_0 . При какой *наименьшей* скорости шарик поражает цель? Под каким углом к горизонту нужно производить выстрел в этом случае?

Как уже говорилось, в цель можно попасть с начальной скоростью v_0 по двум траекториям. На первый взгляд кажется, что начальная скорость полета шарика будет *наименьшей* из всех возможных, если *наивысшая* точка траектории приходится на то место, в которое хотим попасть. Одна из траекторий как раз соответствует этому предположению. Но если мы найдем $v_{0\min}$ и α_0 и проведем компьютерный эксперимент, то обнаружится ошибочность этого предположения.

Сначала проведем теоретический анализ. Известно, что $s = v_0^2/(2g)$ и $H = v_0^2/(4g)$, т.е. $s = 2H$. Тогда

$$\begin{aligned} v_{0\min}^2 &= g \left(H + \sqrt{H^2 + s^2} \right) = gH (1 + \sqrt{5}) = \\ &= \frac{v_0^2}{4} (1 + \sqrt{5}) \approx 0,81 v_0^2, \\ &\text{и } v_{0\min} = 0,9 v_0 = 4,5 \text{ м/с}, \\ \operatorname{tg} \alpha_0 &= \frac{H + \sqrt{H^2 + s^2}}{s} \approx 0,61, \\ &\text{и } \alpha_0 \approx 58^\circ \approx 1,01 \text{ рад}. \end{aligned}$$

Для того чтобы наглядно представить траекторию движения шарика, при которой он может поражать цель, проведем соответствующий компьютерный эксперимент. Результаты этого эксперимента представлены на рисунке 6. При измерении угла α_0 с помощью транспортира можно убедиться, что результаты теоретического анализа и эксперимента получаются одинаковыми. Таким образом, шарик, выпущенный из пистолета с минимальной скоростью, поразит цель в точке с координатами $\left(\frac{v_0^2}{2g}; \frac{v_0^2}{4g}\right)$ только при *нисходящем* полете. Соответствующая тра-

Рис. 6

ектория шарика представлена на рисунке 6 коричневым цветом. Также нетрудно найти углы начальных скоростей v_0 шариков, движущихся по двум другим траекториям. Для этого используем уравнение (3) и получим $\operatorname{tg} \alpha = 2 \pm 1$, т.е. углы равны 45° и 71° соответственно. (Эти углы можно найти также экспериментальным способом – измерив углы начальных скоростей с горизонтом непосредственно транспортиром.)

Пример 3. Соблюдая все условия примера 2, нужно найти *наименьшую скорость* шарика и соответствующий угол выстрела, необходимые для поражения цели, когда она находится:

- а) внутри эллипсоида в точке $\left(\frac{v_0^2}{8g}; \frac{v_0^2}{4g}\right)$;
- б) в пространстве между эллипсоидом и параболоидом в точке $\left(\frac{5v_0^2}{8g}; \frac{v_0^2}{4g}\right)$.

При теоретическом рассмотрении этого примера и в результате компьютерных экспериментов можно убедиться в том, что поражение любой цели происходит только при *нисходящем* полете. А ответы будут такими.

$$\begin{aligned} \text{В случае а) } v_{0\min}^2 &= g \left(H + \sqrt{H^2 + s^2} \right) = \\ &= \frac{v_0^2}{4} (1 + \sqrt{2}) \approx 0,60 v_0^2, \text{ и } v_{0\min} \approx 0,78 v_0 \approx \\ &\approx 3,88 \text{ м/с}; \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{H + \sqrt{H^2 + s^2}}{s} \approx 2,41, \text{ и } \\ &\alpha_0 \approx 68^\circ \approx 1,19 \text{ рад}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{В случае б) } v_{0\min}^2 &= g \left(H + \sqrt{H^2 + s^2} \right) = \\ &= \frac{v_0^2}{4} \left(1 + \frac{\sqrt{29}}{2} \right) \approx 0,92 v_0^2, \text{ и } v_{0\min} \approx 0,96 v_0 \approx \\ &\approx 4,80 \text{ м/с}; \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{H + \sqrt{H^2 + s^2}}{s} \approx 1,48, \text{ и } \\ &\alpha_0 \approx 56^\circ \approx 0,98 \text{ рад}. \end{aligned}$$