Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Мерзон, Формула Пика и тающий лед, *Квант*, 2018, номер 9, 36–37

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20180905>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 14:28:03

Формула Пика и тающий лед

Г. МЕРЗОН

Формула Пика

Хорошо известен следующий способ *приближенного* вычисления площади фигуры на клетчатой бумаге: к числу клеток, полностью занятых фигурой, надо прибавить половину от числа клеток, занятых частично (рис. 1). Но замечательно, что небольшой модификацией этот нехитрый рецепт можно превратить в *точную* формулу для площади многоугольника.

Рис. 1

Площадь многоугольника с вершинами в узлах сетки может быть найдена по формуле

$$S = i + \frac{b}{2} - 1,$$

где i – число узлов сетки (строго) внутри многоугольника, b – число узлов сетки на его границе.

Рис. 2

Пример использования формулы Пика приведен на рисунке 2.

Из этой формулы видно, кстати, что площадь многоугольника с вершинами в узлах сетки всегда является целой или полуцелой (что априори не очевидно даже для треугольников: представьте себе вычисление этой площади по формуле Герона...).

Известны разные доказательства формулы Пика (см., например, [1], [2]). В большинстве из них сначала рассматривают случай треугольника, а затем сводят к нему формулу Пика для произвольного многоугольника.

Мы обсудим мысленный эксперимент, который предложил Кристиан Блаттер ([3]; см. также изложение в [4]), непосредственно доказывающий формулу Пика для любого многоугольника. Но сначала перепишем правую часть формулы немного в другом виде.

Веса узлов

Площадь фигуры можно оценить приблизительно, просто посчитав количество узлов, которые эта фигура покрывает. Чтобы посчитать точнее, посмотрим на узлы чуть внимательнее: узлы строго внутри многоугольника учитываются с весом 1, а узлы на границе – с весом $1/2$ («лежат внутри наполовину»). Естественно сделать следующий шаг и начать по-разному учитывать вершины многоугольника и узлы сетки на его сторонах.

Нарисуем вокруг каждого узла сетки по кругу маленького радиуса и посчитаем каждый узел с таким весом, какая часть этого круга лежит внутри нашего многоугольника (т.е. точка вне многоугольника получает вес 0, точка строго внутри – вес 1, «обычная» точка на стороне – вес $1/2$, вершина угла α – вес $\alpha / (2\pi)$).

Теорема. Площадь многоугольника с вершинами в узлах сетки равна количеству занятых им узлов сетки, посчитанных с указанными выше весами.

Утверждение этой теоремы равносильно формуле Пика. Действительно, вес каждой из i внутренних вершин равен 1. А вес каждой из b вершин на границе отличается от $1/2$ на *внешний* угол в этой точке, де-

Рис. 3

ленный на 2π . Так как сумма всех внешних углов многоугольника равна 2π , сумма весов внешних вершин равна $b/2 - 1$ (рис.3).

Такая формулировка формулы Пика в определенном смысле более естественна. И в такой форме теорема буквально верна и для «многоугольников с дырками» (тогда как обычная формула Пика требует некоторой модификации). С другой стороны, в этой формулировке перестала быть видна полужелобчатость площади...

Тающий лед

Перейдем к доказательству теоремы.

Представим себе, что в каждом узле сетки стоит по тонкому цилиндрическому столбику льда. Вес (точнее

Рис. 4

— масса) каждого столбика равен 1; радиус у всех столбиков одинаковый и достаточно маленький, чтобы столбик в узле, не лежащем на стороне, не пересекал эту сторону. Тогда общий вес льда внутри нашего многоугольника как раз равен сумме весов узлов (рис.4).

Растопим теперь весь лед. Вода растеется равномерно по плоскости. Утверждение теоремы состоит в том, что количество воды внутри многоугольника (площадь) в точности равно количеству льда, который находился внутри многоугольника (сумма весов).

Чтобы не думать, как именно течет и перемешивается бесконечное количество воды на бесконечной плоскости, можно по-

Рис. 5

строить вокруг каждого из столбиков льда по забору в виде единичного квадрата (рис.5) и считать, что каждый столбик растекается по своему квадрату одинаковым и центрально-симметричным образом.

Посмотрим на по-

ток воды через какую-нибудь сторону многоугольника. Исходная расстановка столбиков льда *симметрична относительно середины этой стороны*. Значит, симметричны и потоки воды при таянии льда (рис.6). В частности, через каждую сторону многоугольника втекло столько же воды, сколько вытекло!

Теорема доказана.

Рис. 6

Обобщения

Точно такое же рассуждение показывает, что объем многогранника (с вершинами в узлах сетки) равен сумме весов занимаемых им узлов, *если каждая грань многогранника имеет центр симметрии*.

Последнее ограничение существенно: если взять какой-нибудь тетраэдр, то его объем обычно не равен сумме вкладов узлов (можете убедиться в этом, например, для правильного тетраэдра, вписанного в единичный куб).

Тем не менее, рассматривая вместо сумм весов некоторые многочлены («solid-angle polynomials»), можно получить формулы для объемов многогранников любой размерности. В частности, можно получить формулу для объема многогранника в трехмерном пространстве, если учитывать кроме узлов исходной сетки узлы вдвое более мелкой сетки.

Другая возможность состоит в том, чтобы по-другому выбирать веса. На этом пути тоже можно получить замечательные формулы для объемов многогранников. Но об этом поговорим в другой раз.

Литература

1. Н.Васильев. Вокруг формулы Пика. — «Квант», 1974, №12.
2. А.Кушнirenко. Целые точки в многоугольниках и многогранниках. — «Квант», 1977, №4.
3. С.Blatter. Another Proof of Pick's Area Theorem. — Mathematics Magazine, 1997, 70.
4. S.Tabachnikov. Proofs (not) from The Book. — Mathematical Intelligencer, 2014, 36 (2).