Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Иванов-Погодаев, А. Малистов, Задача о завистливых разбойниках, *Квант*, 2018, номер 10, 6–14

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20181002>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 09:05:14

Задача о завистливых разбойниках

И.ИВАНОВ-ПОГОДАЕВ, А.МАЛИСТОВ

КОГДА ШКОЛЬНИКИ НАЧИНАЮТ ИЗУЧАТЬ метод математической индукции, им часто предлагается следующая классическая задача:

Несколько разбойников хотят разделить между собой награбленную кучу золотого песка. Каждый из них способен на глаз разделить кучу песка на несколько частей в любом требуемом отношении. Например, или поровну на 10 частей, или на две части в соотношении 5:6, или как-нибудь еще. При этом глазомер у всех разбойников может быть разный, т.е. они могут по-разному оценивать относительную ценность куч. Считается, что золотой песок можно делить на части сколько угодно раз, т.е. никаких неделимых частиц золота нет и даже очень маленькую кучу можно разделить на еще меньшие. Пусть разбойников n . Требуется придумать, как разбойникам разделить кучу, чтобы каждый получил не менее $1/n$ песка по своему мнению.

Решается задача нетрудно. Для двух разбойников все просто: пусть первый разделит кучу на две равные, по его мнению, части, а второй выберет, какую из них он возьмет себе. Тогда каждый будет уверен, что получил не менее половины. Будем считать, что мы научились делить кучу на k разбойников, и теперь надо научиться делить на $k + 1$. Пусть k разбойников уже разделили добычу, и пришел еще один. Предложим каждому из первых k разбойников разделить свою добычу на $k + 1$ равных по его мнению долей, а последнему разбойнику дадим право забрать у каждого одну такую долю. Тогда этот последний разбойник наберет себе не

менее $\frac{1}{k+1}$ добычи. У первых же k разбойников останется $\frac{k}{k+1}$ от их доли песка. Так как, по индуктивному предположению, у них было не менее $\frac{1}{k}$ всей кучи песка до прихода последнего, то теперь останется не менее $\frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{k+1}$ добычи. Теперь мы умеем делить кучу на $k + 1$ разбойников, индуктивный переход завершен.

Переход можно сделать и по-другому, через правило крайнего. Попробуем выбрать самого скромного разбойника, чтобы его долю все остальные оценивали как маленькую. Предложим первому разбойнику выделить в отдельную кучу X по его мнению $\frac{1}{k+1}$ долю от всей добычи и назначим пока его *самым скромным*. Допустим, что есть другой разбойник, считающий, что это больше, чем $\frac{1}{k+1}$. Тогда теперь он у нас будет самым скромным, и мы его попросим отделить, уже по его мнению, $\frac{1}{k+1}$ добычи, отбросив часть, от X . Далее будем так переходить от разбойника к разбойнику, ища все более скромного. Этот процесс закончится, так как куча X все время уменьшается и разбойники, которые сокращали ее до размера $\frac{1}{k+1}$, больше не будут считать, что X больше, чем $\frac{1}{k+1}$. (Здесь мы используем *полуинвариант*¹ для доказательства остановки процес-

¹ Полуинвариантом здесь является количество разбойников, несогласных с тем, что куча X не превосходит $\frac{1}{k+1}$ от всего золота. С каждым уменьшением кучи X это количество строго убывает, значит, за конечное число шагов уменьшится до нуля. (Прим. ред.)

са.) Значит, в конце концов найдется самый скромный разбойник, скромнее которого уже нет никого. Пусть он заберет эту кучу X , а остальную часть добычи, которую все оценивают как не меньшую, чем $\frac{k}{k+1}$, мы можем разделить на k оставшихся разбойников по предположению индукции.

Формулировка задачи с завистью

Математики любят задавать дополнительные вопросы, усложняя условия уже решенных задач. Очень часто такое любопытство позволяет найти новые идеи и закономерности. Давайте и тут попробуем задать вопрос: «Что, если ...?»

Что, если каждый разбойник хочет не только получить $1/n$ добычи, а еще и желает получить не меньше, чем любой другой его собрат? Иными словами, разбойники теперь у нас *завидуют* друг другу. Обозначим через $m_1(X), m_2(X), \dots, m_n(X)$ мнения разбойников, какую часть от общей добычи составляет куча X . В этих обозначениях i -й разбойник согласен на часть X без зависти, если $m_i(X) \geq \frac{1}{n}$. А условие с завистью выглядит так: $m_i(X_i) \geq m_i(X_j)$, где X_i и X_j — части добычи для i -го и j -го разбойников соответственно.

Сразу видно, что для двух разбойников ничего не поменяется, схема «один делит, другой выбирает» работает и в случае зависти. Но уже для $n = 3$ начинаются проблемы (попробуйте провести то же рассуждение!). Условие зависти существенно осложняет рассуждения, вынуждая нас искать другие пути решения...

Небольшое отступление. Авторы узнали про задачу о разбойниках с завистью в июле 1999 года. Решений, кроме как для трех разбойников, никто из нас не знал. Скоро должна была состояться Летняя конференция Турнира городов, и такая задача хорошо подходила в качестве темы проекта. Авторы скорее даже обрадовало то, что решение задачи еще только предстояло найти. Правда, формат конференции предполагает, что должны быть предложены промежуточные задачи, нельзя же просто так взять и попросить решить общий вопрос.

Итак, нам предстояло наметить план решения, не зная наверняка, приведет ли он к успеху...

Задача о завистливых разбойниках активно обсуждалась и обсуждается в литературе [2–8]. В этой статье мы решим задачу, но не сразу изложим готовое решение, а расскажем, как мы к нему шли, подробно обсуждая каждую ключевую идею решения.

Случай трех завистливых разбойников

Итак, в общем случае все уж совсем непонятно, попробуем придумать алгоритм раздела хотя бы для трех разбойников. С чего начать? Логично сначала разделить добычу на три равные части по мнению первого и упорядочить их по мнению второго. Пусть это части A, B, C . Обозначим через $m_1(X), m_2(X)$ и $m_3(X)$ мнения разбойников, какую часть от общей добычи составляет куча X . В этих обозначениях мы можем записать, что $m_1(A) = m_1(B) = m_1(C)$ и $m_2(A) \geq m_2(B) \geq m_2(C)$. Эти условия удобно представить в виде трех столбиков уменьшающихся размеров (рис.1), такими их видит второй разбойник, а первый считает их равными.

Было бы неплохо, если бы какой-нибудь столбик забрал себе второй разбойник, какой-то другой — третий разбойник, и тогда оставшийся мы бы отдали первому, который все равно все столбики считает равными и возражать не будет.

Второй разбойник, конечно, из зависти хочет забрать себе самый большой по его мнению столбик. Поэтому поинтересуемся, как же наши столбики оценивает третий разбойник. Например, если третий разбойник считает, что либо B , либо C ,

либо и B , и C не меньше, чем A , то он может забрать себе B или C без зависти. Но что же делать, если и второй и третий считают A строго самым большим столбиком из трех?

Тут используется первая важная идея: попробовать выделить кучу, при разделе которой зависть частично не будет действовать. Как же это возможно? А вот как: пусть второй разобьет A на A_1 и A_2 , чтобы $m_2(A_1) = m_2(B)$, т.е. выделит в A часть A_1 , равную по его мнению B (рис. 2).

Будем теперь делить между разбойниками кучи A_1 , B и C , а остаток A_2 пока отложим в сторону. Для этого остатка выполнено важное свойство: первый разбойник не будет завидовать, если A_2 заберет себе тот, кто возьмет A_1 , так как первый разбойник считает, что кучи A_1 и A_2 вместе равны B и C .

При выборе между A_1 , B и C для первого и второго разбойников существует по два варианта. Первый разбойник готов забрать себе кучу B , но у него есть и запасной вариант C , так как $m_1(B) = m_1(C)$. Второй разбойник готов без зависти забрать либо A_1 , либо B . После таких приготовлений можно попросить третьего разбойника выбрать между A_1 , B и C . Если он берет себе A_1 , второму можно отдать B , первому C . Если третьему приглянулся B , тогда второму даем A_1 , а первому C . И, наконец, если третий берет C , второму отдаем A_1 , первому B . Пока никто никому не завидует. Осталось разделить A_2 , но теперь у нас есть важное завоевание: первый не завидует второму или третьему с запасом в размер кучи A_2 (в зависимости от того, кто получил A_1)!

Теперь завершить дележ проще. Случаи, когда A_1 забрал второй или третий разбойник, симметричны. Допустим, A_1 забрал второй. Попросим третьего поделить A_2 на три равные части и предложим второму выбрать из них самую большую, а первому выбрать из двух оставшихся. Последнюю часть берет третий. Этот третий считает, что при разделе A_2 взял равную остальным часть. Вторым выбирал из трех частей первым и, конечно, взял себе большую из них без зависти к остальным. Первый же не завидует третьему, потому что выбирал раньше и взял часть большую, по собственному мнению, чем досталась третьему. Ну а второму первый не завидует, так как готов был согласиться, что он заберет себе всю кучу A_2 , а не только ее часть.

Итак, что же мы сделали? Сначала мы разделили часть добычи, при этом удалив зависть первого разбойника ко второму или третьему. А потом это позволило нам завершить дележ. Это важная идея: иногда что-то не получается сделать сразу, но можно попробовать добиться выгодных условий, с помощью которых уже удобно доделать начатое.

Шаг назад: дележ без зависти в заданном отношении

Обычно, когда занимаешься трудной задачей, имеет смысл рассматривать идейно близкие вопросы. Кроме того, можно пробовать обобщать уже изученные ситуации. У нас такой ситуацией является случай с отсутствием зависти. Как же его можно обобщить?

Если добычу делят два разбойника, они могут захотеть поделить ее не поровну, а на части α и $1 - \alpha$. Пусть, для определенности, $\alpha < 1/2$. Конечно, если α — рациональное число, работает такой же алгоритм, как в общем случае. Можно просто представить, что разбойник, которому должна достаться доля p/q , — это на самом деле p разбойников, каждому из которых должна достаться доля $1/q$. А долю $1/q$ отделить легко — пусть наш разбойник разобьет добычу на q одинаковых частей, а другой пусть отдаст ему самую малень-

кую из них, по его мнению. То же самое можно сделать, если разбойников n и разбойник с номером i должен получить часть p_i/q , где $q = \sum p_i$ – общий знаменатель всех рациональных долей. Просто представим, что каждый разбойник – это на самом деле p_i разбойников.

Но что делать, если α – иррациональное число? Пусть первый разбойник разделит добычу на части α и $1 - \alpha$. Если второй не согласен, значит, первую часть он оценивает, как большую, чем α , а вторую – как меньшую, чем $1 - \alpha$. Как это использовать? Раз он считает первую часть такой ценной, пусть и забирает ее! Теперь осталось ему отдать $1 - 2\alpha$, а второму – α .

Вроде бы ситуация не изменилась? Но нет, второй-то отданную часть оценивает повыше, чем α . Пусть d – это насколько повыше, чем α , он оценивает этот кусочек. Теперь получается, что у второго образовался небольшой запас. При оставшемся разделе он может согласиться получить чуть меньше, чем $1 - 2\alpha$, главное, чтобы это «чуть» было не больше, чем d .

Мы придумали, как немного «пошевелить» мнения наших разбойников (использовали идею малых шевелений). Но как это поможет закончить дележку? Небольшое шевеление означает, что оставшуюся часть мы можем делить не в отношении $\alpha : (1 - 2\alpha)$, а в отношении $(\alpha + \delta) : (1 - 2\alpha - \delta)$, где $\delta < d$. Первый-то будет не против, что вместо α ему достанется $\alpha + \delta$. А второй не против получить на δ меньше, так как он уже забрал кусочек, который больше на d , чем он рассчитывал.

И тут нам на помощь приходит факт, что для каждого действительного числа β можно подобрать близкое к нему рациональное r . Более точно это можно сказать так: какое бы мы ни взяли маленькое положительное число ε , можно выбрать рациональное r такое, что разница между β и r будет меньше ε .

Эта идея приходит из математического анализа, где как раз и изучаются такие бесконечно малые величины. Там же доказывается, что любое действительное число можно приблизить с любой точностью рациональными числами.

Как говорят, множество рациональных чисел *всюду плотно*.

Теперь мы можем завершить дележ – для рациональных-то чисел мы уже научились делить! Выберем δ так, чтобы отношение $(\alpha + \delta) : (1 - 2\alpha - \delta)$ было рационально, а дальше уже все ясно!

Также понятно, как обобщить алгоритм и разделить добычу на n разбойников в отношениях $\alpha_1 : \alpha_2 : \dots : \alpha_n$. Можно считать, что на $n - 1$ мы уже умеем делить (*принцип математической индукции*) и $n - 1$ разбойников поделили добычу в отношениях $\alpha_1 : \alpha_2 : \dots : \alpha_{n-1}$. Теперь пришел еще один разбойник. Пусть он подойдет к каждому из остальных и проведет раздел на двоих в отношении $\alpha_n : (1 - \alpha_n)$. Так он получит свою долю, а отношения остальных долей не изменятся.

Итак, небольшое обобщение условия дало нам полезную идею: часть добычи, которую разбойники оценивают по-разному, можно рассматривать как запас. Если есть различия в оценке, то в оставшейся части добычи это можно использовать, т.е. один разбойник может чуть-чуть уступить. В случае раздела на троих с завистью мы использовали похожий прием: первый разбойник готов был согласиться, что второй заберет полностью или частично всю кучу A_2 .

Обобщенный дележ со слабой завистью

Теперь вернемся к основному случаю с завистью. На этот раз попробуем не обобщить условие задачи, а наоборот, ослабить его. Пусть пока общего алгоритма раздела нет, но, может быть, можно сделать «почти раздел», когда разбойник согласен, что кто-то получил больше, но не более чем на какое-то первоначально выбранное маленькое число ε . Продолжая эту мысль дальше, зададимся вопросом: могут ли разбойники разделить добычу на две равные части, причем чтобы каждый из них считал, что это соотношение выполнено с точностью до ε ? «С точностью до ε » в данном случае означает, что каждая часть отличается от $1/2$ не более чем на ε по мнению каждого из разбойников.

Идея тут в том, чтобы «склеить» разбойников, сделав их отличающимися друг от друга не очень сильно. Для начала разберемся с двумя разбойниками. Раз уж нам разрешено немножко нарушать соотношение, давайте разобьем сразу всю добычу на очень маленькие части, а дальше уже с помощью этих маленьких кусочков будем набирать требуемые половины. Но тут сразу возникает проблема: маленькие части могут быть маленькими только для одного разбойника, а для другого – уже нет! Ладно, допустим, первый разделил добычу в точности на две равные части, по своему мнению. Дальше применяем нашу идею (это *идея квантования*). Делим каждую из частей на много-много одинаковых маленьких кусочков (пусть их будет по m штук), чтобы каждый кусочек первый считал меньшим, чем ε . Что у нас думает второй? Ну, понятно, для него соотношение может сильно отличаться от 1:1. Пусть, для определенности, он первую часть считает большей. Давайте поменяем местами какую-нибудь пару маленьких кусочков. Для первого разбойника ничего не изменилось, он вообще эти кусочки считает одинаковыми. Для второго могло что-то измениться, а могло и нет. Но если мы поменяем так все пары, для второго точно соотношение изменится, это же будет полная замена одной половины на другую! А раз в конце для него соотношение изменится (разница между долями поменяла знак!), значит, в какой-то момент это произойдет впервые. Давайте посмотрим на наши части в этот момент. Итак, второй только что поменял кусочки A и B , до этого первая половина была для него больше, а после этого больше стала вторая.

Так пусть второй, вместо того чтобы менять местами A и B , отсыплет часть от B и прибавит ее к A , чтобы по его мнению большие половины сравнялись. Теперь у нас первый уже не будет считать эти половины одинаковыми. Но и отличаться они для него будут не сильно – он же кусочки A и B считает маленькими! Итак, для двоих мы сделали даже больше – один считает части одинаковыми, а второй одинаковыми с точностью до ε .

Значит, двух разбойников мы можем сделать близкими друг другу в смысле мнений при делении добычи пополам. Но тогда и индукцию применить нетрудно. Пусть для n разбойников мы можем разделить добычу на две части так, что один считает раздел точным, а все остальные – что различие не больше ε . Пусть эти n разбойников теперь действуют как один – сначала разделят всю добычу на две равные части с относительной точностью до $\varepsilon/8$. Потом каждую из них еще на две равные части с точностью до $\varepsilon/16$, потом еще на две с точностью до $\varepsilon/32$... И так будем продолжать делить, пока все полученные нами кусочки не будут меньше, чем $\varepsilon/2$. Суммарная погрешность при таком делении не превысит $\varepsilon/4$. Таким образом, каждый кусочек гарантированно не больше, чем $\frac{3}{4}\varepsilon$ для любого из n разбойников.

Последний, $(n+1)$ -й разбойник теперь пусть меняет местами наши кусочки, пока его мнение о том, какая часть больше, не изменится. В этот момент для последней пары A и B пусть он не меняет их местами, а пересыплет из второй части в первую необходимое количество песка, чтобы основные половины сравнялись. Тогда для него разделение будет точным, а для остальных – с точностью до $\frac{7}{8}\varepsilon < \varepsilon$: невозможно пересыпать песка больше, чем $\frac{3}{4}\varepsilon$, так как размер кучек A и B меньше, плюс начальная погрешность разделения основных половин была меньше $\frac{1}{8}\varepsilon$, а $\frac{3}{4}\varepsilon + \frac{1}{8}\varepsilon = \frac{7}{8}\varepsilon$.

Дележ со слабой завистью в заданном отношении

Теперь логично подумать опять о том, как разделить добычу не на равные части, а в соотношении $\alpha : \beta$. Причем с теми же условиями, когда один считает, что разделение точное, а остальные – что оно отличается от $\alpha : \beta$ не более чем на ε .

Похожую задачу мы уже решали – для случая без зависти. Тогда нам помогло то,

что можно найти рациональное число, не сильно отличающееся от произвольного действительного числа α . А что мы умеем сейчас? Делить пополам с произвольной точностью! Значит, мы можем отмерять части, равные $1/2, 1/4, \dots, 1/2^k$, — достаточно лишь несколько раз поделить пополам одну и ту же часть. Стоп, но ведь тогда может накапливаться наша погрешность. Если сто раз поделить с погрешностью δ , то и погрешность может стать равной $100\delta \dots$

Все так, но ведь мы можем управлять погрешностью. Вот пусть нам нужно отделить $1/2^{100}$. Разделим сначала с погрешностью $\delta/2$, потом с погрешностью $\delta/4$, потом с погрешностью $\delta/8$ и в последний раз с погрешностью $\delta/2^{100}$. Как оценить суммарную погрешность $\delta/2 + \delta/4 + \dots + \delta/2^{100}$?

Допустим, $S_n = \delta/2 + \delta/4 + \dots + \delta/2^n$. Как можно получить S_{n+1} ? Добавить $\delta/2^{n+1}$ к S_n . Или еще способ: умножить S_n на $1/2$ и добавить $\delta/2$. Но тогда $S_n/2 + \delta/2 = S_{n+1}$, т.е. $S_n = \delta - \delta/2^n$. (Тут мы применили идею подсчета двумя способами.) Итак, $\delta/2 + \delta/4 + \dots + \delta/2^{100} = \delta - \delta/2^{100} < \delta$. Ясно, что вместо 100 тут можно поставить любое число. Значит, выбирая δ и уменьшая вдвое погрешность на каждом шаге, мы можем добиться того, чтобы суммарная погрешность при любом числе делений не превышала δ .

Хорошо, мы можем отделять доли $1/2, 1/4, \dots, 1/2^k$, а также их суммы. Но тогда можно подобраться к любому числу α с заданной погрешностью ε .

Достаточно выбрать такое k , чтобы $1/2^k < \varepsilon/2$. Единичный отрезок можно разделить на 2^k отрезков, каждый из которых имеет длину $1/2^k$. Число α попадет в один из отрезков между $m/2^k$ и $(m+1)/2^k$ (рис.3). Это будет означать,

Рис. 3

что его можно приблизить рациональным числом $m/2^k$ со знаменателем 2^k .

Пока мы разделили добычу с точностью до ε у всех разбойников. Теперь можно улучшить алгоритм, чтобы один думал, что раздел точен. Опять воспользуемся идеей с выравниванием одной маленькой части. Выберем какое-нибудь очень большое число m , разделим всю добычу на m равных частей с погрешностью ε/m^2 . Теперь опять один набирает сколько нужно частей, а одну часть делит, как считает нужным. Делимую долю все оценивают не более чем $1/m + \varepsilon/m^2$. А отличие мнений по всем остальным долям, которые набрал разбойник, составляет не более $m \cdot \varepsilon/m^2 = \varepsilon/m$. Таким образом, по мнению остальных набранная доля отличается от нужной не более чем на $(2 + \varepsilon)/m$. Поскольку мы сами выбираем m , эту погрешность можно сделать такой маленькой, как нам хочется.

Итак, наш арсенал доступных действий увеличился. Теперь мы можем делить в произвольном отношении с любой заданной точностью. Причем один разбойник будет считать, что раздел произведен точно в этом отношении. А что если мы вообще все разделения добычи будем делать так, чтобы все разбойники с ним соглашались с какой-то точностью? Причем эту точность можно уменьшать в два раза при каждом следующем разделе, и тогда суммарная погрешность тоже будет маленькой! Теперь можно приступить к основной задаче точного раздела с завистливыми разбойниками.

Точный дележ с завистью

Конечно, тут опять надо действовать по индукции, и база для двух и для трех разбойников уже есть. Допустим, мы уже умеем делить на n разбойников, и надо научиться это делать для $n + 1$.

Нас несколько ограничивает то, что наш основной прием, когда все согласны с разделением с некоторой точностью, это не точная дележка. И при разделе на равные части разбойники все равно могут завидовать друг другу. Как же бороться с этой завистью? Идея состоит в следую-

щем: если некоторый маленький кусок добычи несколько разбойников оценивают как больший, чем δ_2 , а остальные – как меньший, чем δ_1 , и $\delta_1 < \delta_2$, то мы можем принять $\varepsilon = \delta_2 - \delta_1$. Теперь если отдать этот кусок первой группе, то вторая группа не будет завидовать первой в пределах ε , т.е. у нас появляется тот самый небольшой запас, чтобы задавать точность дальнейших разделений и применить ту технику, которую мы придумали. Любопытно, что если просто какую-либо маленькую часть добычи все разбойники оценивают неодинаково, то мы можем упорядочить их оценки по возрастанию: $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_k < \mu_{k+1} \leq \dots \leq \mu_n$ и, взяв любые две неодинаковые последовательные оценки $\mu_k < \mu_{k+1}$, разделить разбойников на две описанные выше группы: в первую группу войдут разбойники с оценками не меньше $\delta_2 = \mu_{k+1}$, а во вторую группу – с оценками не больше $\delta_1 = \mu_k$.

Если мы отдадим такой кусок первой группе разбойников, между собой они его смогут поделить по предположению индукции, это понятно. Но отдав маленький кусочек части разбойников, остальную добычу придется делить уже не поровну, а в некотором соотношении, и для этого случая у нас нет предположения индукции!

Что же делать? Давайте опять обобщим условие. Будем рассматривать не раздел поровну на n завистливых разбойников, а раздел с некоторым назначенным правилом $\alpha_1 : \alpha_2 : \dots : \alpha_n$. Условие зависти тут будет обобщенное: каждый относительно любого другого хочет получить долю не меньшую, чем предполагает заданная пропорция. Выразим это так. Пусть A_{ij} – это то, как оценивает i -й разбойник j -й кусок добычи. Тогда для любой пары i и j должно быть верно неравенство $A_{ii}/A_{ij} \geq \alpha_i/\alpha_j$. Иными словами, i -й разбойник оценивает отношение своей доли к доле j -го разбойника как не меньшее, чем отношение их долей в назначенном правиле. Если все α_i равны 1, то получается обычная задача деления поровну с завистью.

Если теперь осуществлять раздел с обобщенным условием зависти, то и индуктивное предположение можно тоже использовать с обобщенным условием, а это уже гораздо удобнее! Но, правда, нам надо передоказать базу. Впрочем, база для двух разбойников – это как раз задача про раздел в соотношении $\alpha : \beta$. Для двух-то разбойников завистливый случай от независтливого не отличается.

Окончательный алгоритм

Вернемся теперь к задаче с обобщенным условием зависти. Допустим, для числа разбойников от 1 до $n - 1$ мы делить уже умеем. Нам нужно сделать индуктивный переход. Попробуем оформить все идеи и построения, которые мы до этого придумали. Пусть первый разбойник разделит добычу в исходных пропорциях. Если все согласны, то алгоритм завершен. В противном случае найдется кусок I , который часть разбойников оценивает больше некоторого числа Φ (назовем ее группой 1, пусть это первые s разбойников), а другая часть – меньше Φ (группа 2).

Можно считать, что кусок I все считают маленьким, т.е. меньшим любого выбранного наперед числа. Действительно, мы же можем поделить I на миллиард одинаковых частей с погрешностью, меньшей чем максимальная оценка I среди разбойников. Кроме того, можно считать, что ровно в Φ никто кусок I не оценивает (см. рассуждения выше).

Заметим, что разностей между оценками разбойниками куска I и числом Φ всего n , у первой группы они положительны, у второй – отрицательны. Значит, можно выбрать такое маленькое положительное число ω , которое меньше, чем модули всех этих n разностей. Тем самым, в пределах ω вторая группа не будет завидовать первой.

Этот кусок I предназначается группе 1, пока отложим его. А остальную добычу разделим на две части A и B в отношении $(\alpha_1 + \dots + \alpha_s - \Phi) : (\alpha_{s+1} + \dots + \alpha_n)$ так, чтобы все согласились с этим делением с точностью до ω . Тогда как оценивает группа 1 два куска A и I вместе?

Каждый из группы 1 эти два куска в сумме считает строго большими, чем $\alpha_1 + \dots + \alpha_s$, т.е. больше, чем полагающиеся всей группе количество добычи! Раз каждый считает $A + I$ *строго* большим, чем $\alpha_1 + \dots + \alpha_s$, значит, можно выбрать такое положительное число δ_1 , что каждый из первой группы считает $A + I$ большим, чем $\alpha_1 + \dots + \alpha_s + \delta_1$.

Используемый нами тут прием: *если $X > Y$, то можно выбрать такое положительное число a , что $X > Y + a$* , также довольно типичен для математического анализа. Из строгости неравенства мы можем извлекать некоторый запас для дальнейших построений.

А что же со второй группой? Каждый из них считает части $A + I$ меньше, чем $\alpha_1 + \dots + \alpha_s$ (эти-то считают I *меньшим* Φ). Значит, остальное, т.е. часть B , каждый из них считает больше, чем $\alpha_{s+1} + \dots + \alpha_n$. И опять можно выбрать такое δ_2 , что каждый из второй группы оценивает часть B как большую, чем $\alpha_{s+1} + \dots + \alpha_n + \delta_2$.

Итак, уже виден свет в конце тоннеля: нам удалось разделить разбойников на две группы, выделить этим группам доли, да еще все уверены, что им достается чуть больше, чем нужно, т.е. у нас появляется столь необходимый запас! Выберем δ как минимальное из δ_1 и δ_2 , чтобы дальше работать с одним числом, символизирующим наш запас точности. Теперь, в соответствии с нашим планом, мы должны воспользоваться индуктивным предположением, чтобы первая группа разделила на своих разбойников объединенный кусок $A + I$, а вторая – кусок B .

Почему мы при этом не превысим наш запас точности? Выберем ϵ много меньше δ . Теперь посмотрим на процесс дележа, который нам предоставляется индуктивным предположением. Этот дележ состоит из последовательности элементарных делений, когда какой-то разбойник делит что-то в каких-то пропорциях. Так пусть такие элементарные деления проводятся таким образом, чтобы все остальные были согласны, причем с точностью,

которая растет в два раза при каждом следующем элементарном делении.

Тем самым, первый раздел пусть проводится так, чтобы все остальные n разбойников согласились с точностью до $\epsilon/2$, второй – чтобы все согласились уже с точностью до $\epsilon/4$, и так далее. Иными словами, если проводится k -й раздел (неважно, каким разбойником), то все остальные соглашаются с ним с точностью до $\epsilon/2^k$. При таком проведении разделов получится, что мнения любых двух разбойников по любым двум непересекающимся кускам добычи могут различаться только менее чем на ϵ .

Теперь проверим, что зависти действительно не будет. Внутри первой группы никакие два разбойника друг другу не завидуют, по предположению индукции. Аналогично внутри второй группы. Рассмотрим разбойников из разных частей. Их мнения по полученным кускам могут разойтись не более чем на ϵ , причем $\epsilon \leq \delta_1$ и $\epsilon \leq \delta_2$, т.е. погрешности раздела незначительны по сравнению с имеющимися у нас запасами. При этом каждый разбойник думает, что он получил чуть больше, чем полагается (так как на всех было выделено чуть больше). Алгебраически это можно выразить так: $A_{ii}/\alpha_i > 1$. А про разбойников из другой части каждый из них думает, что они получили меньше, чем им положено: $A_{ij}/\alpha_j < 1$. Но тогда $A_{ii}/\alpha_i > A_{ij}/\alpha_j$. И следовательно, $A_{ii}/A_{ij} > \alpha_i/\alpha_j$, т.е. условие зависти выполняется.

Эпилог

Подведем итоги нашей работы. Ключ к задаче удалось подобрать, когда мы немного поиграли с условием: сначала чуть ослабили его, потом чуть усилили, рассмотрев обобщенное условие зависти. Ключевыми являются две идеи. Первая – рассмотрение деления добычи с некоторой точностью. И вторая – возможность замены элементарного раздела на последовательность разделов, но уже таких, чтобы все были согласны с разделом с какой-то точностью. Эти две идеи – основные, но кроме них есть еще несколько

второстепенных технических идей: использование куска, который оценивается неодинаково, для создания запаса; оформление алгоритма в виде индуктивного; использование разделов с быстро увеличивающейся точностью (сходящийся ряд). Многие из этих идей широко известны и часто применяются в различных ситуациях. Очень полезно владеть широким набором таких технических идей. Их богатый арсенал позволяет подходить к задаче с разных сторон, а это уже помогает нащупать путь для решения.

Интересно, что в комбинаторной задаче работают методы малых величин, типичные для анализа. Из-за этого найденный алгоритм не очень эффективен на практике. Мы даже не можем оценить, каким будет число разделов в зависимости от n . Значит, в этой задаче еще есть над чем поработать. Для интересующихся данной темой есть набор статей. Может быть, кому-то из читателей удастся придумать собственный алгоритм раздела!

Литература

1. И.А.Иванов, А.Я.Канель-Белов, С.И.Кублановский, А.С.Малистов. Задача о разбойниках. – Избранные материалы Летней кон-

ференции Турнира городов, том 1, 2009, с. 71–82.

2. W.Stromquist. How to cut a cake fairly. – The American Mathematical Monthly, vol. 87, №8, 1980, pp. 640–644.

3. S.J.Brams, A.D.Taylor. An envy-free cake division protocol. – The American Mathematical Monthly, vol. 102, №1, 1995, pp. 9–18.

4. S.J.Brams, A.D.Taylor, W.S.Zwicker. A moving-knife solution to the four-person envy-free cake division. – Proceedings of the American Mathematical Society, 125, 1997, pp. 547–554.

5. W.Stromquist. Envy-free cake divisions cannot be found by finite protocols. – The Electronic Journal of Combinatorics, R11, 15, 2008.

6. A.D.Procaccia. Thou shalt covet thy neighbor's cake. – Proceedings IJCAI'09, pp. 239–244.

7. H.Aziz, S.Mackenzie. A discrete and bounded envy-free cake cutting protocol for any number of agents. – Preprint, <https://arxiv.org/abs/1604.03655>

8. H.Aziz, S.Mackenzie. A discrete and bounded envy-free cake cutting protocol for four agents. – Preprint, <https://arxiv.org/abs/1508.05143>

Работа поддержана грантом РФФ №17-11-01337. Первый автор является лауреатом премии «Молодая математика России».

НАМ ПИШУТ

Еще раз о построении касательной

В статье Д.Швецова «Поляра» («Квант» №5 за 2017 г.) показано, как с помощью одной линейки из точки *вне* окружности провести к этой окружности касательные. Наш постоянный автор и читатель И.Вайнштейн заметил, что это построение позволяет проводить касательную к окружности и через точку, лежащую *на* окружности.

Приведем построение из письма И.Вайнштейна.

Пусть на окружности дана точка E (рис.1). Через эту точку проведем секущую (не через центр окружности), которая пересечет окружность в точке F . Возьмем на прямой EF произвольные точки B и D вне окружности и из них проведем касательные к окружности так, как это указано в статье «Поляра». Пусть соответствующие точки пересечения касательных – A

Рис. 1

и C , а точки касания – K, L, M, N . Пусть прямые KL и MN пересекаются в точке P . Тогда PE – искомая касательная.

В самом деле, нетрудно доказать, что прямая AC тоже проходит через точку P , прямые NK и ML пересекаются на прямой BD , а точки

(Продолжение см. на с. 25)