Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Стасенко, Как сухое трение стало вязким, *Квант*, 2018, номер 10, 26–29

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20181003>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 12:19:29

Как сухое трение стало вязким

А. СТАСЕНКО

*И хоть мгновенно вино,
когда цедишь его, протекает,
Но потихоньку идет и сочится ленивое масло;
Иль потому, что его, очевидно,
крупней элементы,
Иль крючковойтей они
и спутаны больше друг с другом...*

Лукреций. О природе вещей (1 в. до н. э.)

Первым пришел в чувство Том Бекас. Он снял чулок и принялся тереть им джентльменов. Джентльмены не замедлили очнуться.

А.П.Чехов. Летающие острова (XIX в. н. э.)

ТАЙНЫ ПОВСЕМЕСТНОГО И НЕУСТРАНИМОГО трения тысячи лет волнуют людей. И вот как-то прошел слух, что сила сухого трения не зависит от скорости, а вязкого – пропорциональна ей. Для проверки этих утверждений один Способный ученик создал несложную установку (рис.1), в кото-

Рис. 1. Шарик на пружине в трубке с шероховатой внутренней поверхностью (вид сверху, ось y перпендикулярна плоскости листа). При отклонении шарика вправо возвращающая сила направлена влево

рой можно при помощи невесомой нити переместить шарик из точки $x = 0$, когда пружина не напряжена, в точку $x > 0$, тем самым растянув пружину и создав возвращающую силу, равную $-kx$ (здесь k – жесткость пружины). Затем, отпустив нить, можно предоставить шарiku двигаться внутри трубки под действием активной возвращающей силы и, конечно, тормозящей силы

трения, величина которой определяется прижимающей силой $F_y = mg_y$ и коэффициентом трения μ : $F_{тр} = F_x = mg_y\mu$. Здесь уже специально расставлены индексы, показывающие, куда какая сила направлена.

Понятно, что сила трения направлена против скорости движения (на то она и тормозящая), так что уравнение движения шарика в начале, когда $v_x < 0$, можно записать в виде

$$ma_x = -kx + mg_y\mu. \quad (1)$$

Строго говоря, шарик под действием пары сил (трения и жесткости пружины) должен поворачиваться вокруг горизонтальной оси; но эти повороты можно предотвратить конструктивно – например, надев шарик на спицу, проходящую по оси пружины.

Тут Способный ученик решил упростить уравнение, введя новую переменную

$$x' = x - x_*, \text{ где } x_* = \frac{mg_y\mu}{k}.$$

Затем он использовал тот факт, что скорость движения есть изменение расстояния Δx с изменением времени Δt , т.е. $v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, а ускорение – это

$$\text{изменение скорости, т.е. } a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t},$$

так что добавление постоянных величин к координате x не изменяет значения скорости и ускорения: $a'_x = a_x$, $v'_x = v_x$. И тогда уравнение (1) примет вид

$$ma'_x = -kx'. \quad (2)$$

Но ведь это – уравнение гармонических

колебаний с частотой $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, а гармонические колебания не затухают. Они изображаются линейной комбинацией функций $\cos \omega_0 t$ и $\sin \omega_0 t$ (рис.2,а; черный пунктир), а на плоскости смещение–скорость $(x - v_x)$ – окружностью, по которой вечно бежит изображающая точка (рис.2,б; черный пунктир); такая плоскость называется фазовой.

Это движение по окружности на фазовой плоскости соответствует закону сохранения механической энергии шарика (суммы кинетической и потенциальной энергий):

$$\frac{mv_x^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \text{const}.$$

Значит, тут нет никаких потерь!

А как же трение? Ведь это одна из диссипативных сил, приводящих к превращению механической энергии в тепловую. И тут

Рис. 2. а) Изменение x со временем состоит из кусков синусоид. В точках А и В происходит переключение знака (направления) силы сухого трения, в точке С шарик останавливается. б) Фазовая плоскость колебаний при сухом трении — чередующиеся полуокружности с центрами в точках $+x_*$, $-x_*$, $+x_*$. в) Зависимость силы сухого трения от скорости — кусочно-постоянная

Способного ученика осенило: даже если верно принятое предположение о независимости *величины* силы трения от скорости тела, то все равно нужно учесть зависимость от *направления* последней. Это значит, что шарик, двигаясь влево под действием возвращающей силы упругости пружины и проскочив за счет инерции положение равновесия ($x = 0$), сожмет пружину, на мгновение остановится, а затем начнет двигаться вправо. Но при этом изменится и знак силы трения: теперь она будет направлена влево, опять же противоположно направлению скорости. Так что в уравнении (1) силу трения правильнее записать так: $F_{\text{тр}} = F_x = -mg_y \mu \cdot \text{sign } v_x$, где $\text{sign } v_x$ — разрывная функция, означающая просто «знак v_x ». Она называется еще ступенчатой, кусочно-постоянной, релейной (переключающей). График этой силы трения приведен на рисунке 2, в. Таким образом, вектор силы сухого трения очень даже зависит от скорости, хотя одна из физических моделей предполагает постоянство его модуля.

Согласно рисунку 2, а (см. цветные линии), совершив конечное число колебаний, шарик окажется в полосе застоя $-x_* < x < x_*$ с нулевой скоростью (точка С на рисунке 2, а, б), при этом часть запасенной в начальный момент энергии останется в виде потенциальной энергии все еще слегка сжатой пружины. Во всех точках этой полосы деформации пружины недостаточно, чтобы преодолеть силу трения. Конечное число колебаний — характерный признак наличия сухого трения. При остановке почти вся

кинетическая энергия переходит в тепловую. Поэтому на морозе и трут носы (см. эпиграф).

И тут Способному ученику пришла мысль пренебречь силой тяготения (например, поставить смелый опыт в падающем лифте или в кабине спутника), но при этом вращать трубку вокруг оси, проходящей через точку закрепления пружины, с постоянной угловой скоростью ω_y (рис. 3). Тогда скорость

Рис. 3. Трубка с шариком вращается с постоянной угловой скоростью ω_y . При движении шарика вдоль оси трубки возникает прижимающая сила F_ϕ , направленная вправо относительно направления движения

шарика в неподвижной системе координат будет иметь две компоненты: радиальную v_x и азимутальную $v_\phi = \omega_y x$. Перемещаясь вдоль оси x за время Δt на расстояние Δx , шарик будет попадать в области все больших значений x , а значит, все больших значений скорости v_ϕ , и будет «чувствовать», что справа на него все время давит стенка трубки. А он, в свою очередь, давит на вращающуюся трубку, пытаясь сохранить (по инер-

ции) радиальное направление своего движения. Тут можно вспомнить, что в северном полушарии вращающейся Земли у всех рек правые берега крутые – не случайно города строились на них.

Эти рассуждения приводят к мысли о том, что при радиальном перемещении шарика со скоростью v_x в трубке, вращающейся с угловой скоростью ω_y , на него действует прижимающая сила, пропорциональная про-

ентом вязкости) – и мы получим выражение касательного напряжения для так называемых ньютоновских жидкостей. Динамика вязкой жидкости интересовала философов-физиков еще в древности (см. эпиграф).

Возьмем, например, шарик радиусом r , движущийся в жидкости с вязкостью η (рис.5,б). Площадь поверхности шарика равна $S = 4\pi r^2$, характерное изменение скорости обтекающей жидкости при перемеще-

Рис. 4. а) Зависимость прижимающей силы, а значит, и силы вязкого трения от скорости. б) Зависимость от времени колебаний шарика, затухающих под действием силы сухого трения, которая стала пропорциональной радиальной скорости. в) Фазовая траектория затухающих колебаний

изведению этих величин (рис.4,а):

$$F_\phi \sim m v_x \omega_y.$$

(Точный вывод дает еще множитель 2, но не будем утомлять себя дополнительными выкладками и скажем только, что полученная сила называется силой Кориолиса.) Как тут не полюбоваться индексами: они указывают, что три вектора направлены по трем взаимно перпендикулярным осям! Но самое интересное – прижимающая (а при наличии сухого трения и тормозящая) сила оказалась пропорциональна скорости движения шарика, как если бы он падал вместе в пружинной в банке с вязким маслом!

А что значит «вязкость»? Силу сопротивления вязкой среды рассматривал еще Ньютон, исходя из вполне прозрачных соображений. А именно: если жидкость течет (вдоль некоторой площадки) с «продольной» скоростью v_x , изменяющейся на величину Δv_x на поперечном расстоянии Δy (рис.5,а), то возникает тормозящая сила, или касатель-

ное напряжение $\frac{F_x}{S} \sim -\frac{\Delta v_x}{\Delta y}$. Знак «минус» уже учитывает, что эта поверхностная сила – тормозящая. Осталось подставить коэффициент η (он-то и называется коэффи-

Рис. 5. К определению: а) коэффициента ньютоновской вязкости; б) стоксовой силы, действующей на шарик, обтекаемый вязкой жидкостью

нии с полюса на экватор, т.е. на расстояние порядка его радиуса ($\Delta y \sim r$), равно по порядку величины $\frac{v_x}{r}$. Значит, сила сопротивления будет порядка

$$F_x \sim \eta S \frac{v_x}{r} = 4\pi r v_x \eta.$$

Это так называемая сила Стокса (если еще вместо 4 подставить 6).

Итак, сила вязкого трения пропорциональна скорости движения шарика. Что же изменилось в поведении шарика? Теперь его колебания стали затухать плавно, теоретически бесконечно долго, как показано качественно на рисунке 4,б. А на фазовой

плоскости его движение изобразится в виде скручивающейся спирали (рис.4,в). Сравните рисунок 4,в с рисунком 2,б – и вы получите удовольствие, как и наш Способный ученик.

Впрочем, кому нужен этот шарик в трубке... Вот громадный самолет – это да. Но, казалось бы, какую роль может играть вязкость воздуха (которая к тому же в сотню раз меньше вязкости воды, не то что масла) в судьбе летательного аппарата? Однако играет. Оказывается, от нее зависит очень важное явление – так называемый отрыв потока на крыле (сравните рисунки 6,а и б), в результате которого резко падает подъемная сила на больших углах атаки – когда самолет «задирает нос».

Рис. 6. Линии тока воздуха вокруг профиля крыла самолета: а) хорошее обтекание, б) плохое (отрывное) обтекание – задняя поверхность крыла «не работает»

Конечно, как в случае сухого, так и вязкого трения, все определяется взаимодействием молекул. Но чтобы во всем этом разобраться, следует поступить в Московский физико-технический институт на факультет аэромеханики и летательной техники.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Оклейка тетраэдра шестиугольниками

Н.АВИЛОВ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ ПОЙДЕТ РЕЧЬ О КОНКУРСНОЙ задаче №4998 из журнала «Математика в школе»:

Можно ли поверхность правильного тетраэдра оклеить (без пропусков и перекрытий) одинаковыми правильными шестиугольниками?

Скажем сразу, что ответ на вопрос задачи положительный. На рисунке 1 показано шесть решений задачи из их бесконечного множества.

В каждом из решений основой развертки тетраэдра является параллелограмм, состоящий из четырех правильных треугольников. На этот параллелограмм наложен многоугольник, содержащий несколько правильных шестиугольников. Если многоугольник,

Рис. 1

составленный из правильных шестиугольников, перегнуть по сторонам всех треугольников, то при складывании тетраэдра из треугольной развертки будет складываться тетраэдр из шестиугольников, при этом шестиугольники покроют поверхность тетраэдра полностью, без пропусков и перекрытий.

Уточним, что в первой серии решений (см. рис.1; левый столбец) вне параллелограмма находится несколько трапеций, и ровно столько же таких трапеций не накрыли параллелограмм, причем при складывании тетраэдра «выступающие» трапеции как раз займут место «недостающих» трапеций в развертке.