Общероссийский математический портал

М. Нсанбаев, Окружность десяти точек вписанного четырехугольника, *Квант*, 2018, номер 11, 31

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20181104>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 10:13:41

Окружность десяти точек вписанного четырехугольника

М.НСАНБАЕВ

ИЗВЕСТНО, ЧТО В ЛЮБОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих вершины треугольника с его ортоцентром, лежат на одной окружности, которая называется *окружностью Эйлера* или *окружностью девяти точек треугольника*. Аналогом окружности девяти точек для вписанного четырехугольника можно назвать окружность, о которой говорится в следующей задаче, предложенной в 2011 году на VII Международной Жаутыковской олимпиаде (Казахстан):

Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K , точки M и N — середины диагоналей AC и BD соответственно. Описанные окружности треугольников ADM и BCM пересекаются в точках M и L . Докажите, что точки K, L, M и N лежат на одной окружности (все эти точки предполагаются различными).

В данной статье мы покажем, что на этой окружности, в дальнейшем будем обозначать ее μ , помимо точек K, L, M и N лежат еще шесть точек. Это позволяет назвать ее *окружностью десяти точек вписанного четырехугольника*.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

$\omega(ABC)$ — описанная окружность треугольника ABC ;

$S(X)$ — степень точки X (см. [2]) относительно $\omega(ABC)$.

Основная теорема. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник (см. рисунок), M и N — середины его диагоналей, K — точка пересечения его диагоналей, O — центр описанной окружности $ABCD$. Пусть точки F, G, H — вторые точки пересечения

$\omega(ABK)$ с $\omega(CDK)$, $\omega(ABM)$ с $\omega(CDM)$ и $\omega(ABN)$ с $\omega(CDN)$ соответственно. Тогда точки M, N, K, O, F, G, H лежат на окружности μ , диаметром которой будет отрезок OK .

(Заметим, что утверждение теоремы справедливо и для любых других расположений точек A, B, C, D на окружности.)

Перед доказательством основной теоремы напомним несколько фактов. Их доказательства можно прочесть в статьях [1] и [2].

1) Пусть в окружность с центром O вписан четырехугольник. Продолжения его противоположных сторон пересекаются в точках P и Q , а диагонали – в точке K . Тогда каждая из четырех точек O, P, Q, K является ортоцентром треугольника, образованного тремя другими точками. [1]

2) Для двух неконцентрических окружностей геометрическим местом точек P таких, что степени точки P относительно обеих окружностей равны, является прямая, которая называется радикальной осью этих окружностей. [2]

3) Для любых трех попарно неконцентрических окружностей их попарные радикальные оси пересекаются в одной точке. [2]

Доказательство основной теоремы. Пусть $\omega(ABK)$ пересекает $\omega(CDK)$ в точках K и F . Тогда прямые AB, CD, KF пересекаются в точке P , так как AB – радикальная ось окружностей $\omega(ABK)$ и $\omega(ACD)$, CD – радикальная ось окружностей $\omega(CDK)$ и $\omega(BCD)$, KF – радикальная ось окружностей $\omega(ABK)$ и $\omega(CDK)$. Следовательно, выполняется равенство $S(P) = PK \cdot PF = PA \cdot PB$. Аналогично, $S(P) = PM \cdot PG = PN \cdot PH$, где G и H – вторые точки пересечения окружностей $\omega(ABM)$, $\omega(CDM)$ и $\omega(ABN)$, $\omega(CDN)$ соответственно. Так как $PM \cdot PG = PN \cdot PH = PK \cdot PF$, получаем, что точки M, N, K, F, G, H лежат на одной окружности, причем точка O также лежит на ней, поскольку OM и ON перпендикулярны AC и BD соответственно. Из этого следует, что M и N лежат на окружности с диаметром OK , значит, и точки F, G, H лежат на этой окружности. Аналогично доказываются, что также на окружности μ лежат точки пересечения окружностей $\omega(ADK)$ с $\omega(BCK)$, $\omega(ADM)$ с $\omega(BCM)$ и $\omega(ADN)$ с $\omega(BCN)$

соответственно. Исходя из этого, мы и назвали ее окружностью десяти точек.

Дополнительные полезные свойства

1. Если T – любая точка на окружности μ , то $\omega(ABT)$ во второй раз пересекает $\omega(CDT)$ на окружности μ .

В самом деле, пусть прямая PT пересекает μ в точке T' . Тогда

$$PC \cdot PD = PA \cdot PB = S(P) = PK \cdot PF = PT \cdot PT',$$

т.е. точки T и T' лежат на μ и являются пересечениями $\omega(ABT)$ и $\omega(CDT)$.

2. Прямая OQ пересекает прямую PK в точке F .

Так как прямая PK – поляра точки Q , прямая OQ перпендикулярна прямой PK . Заметим, что $\angle OFP = \angle OFK = 90^\circ$, поскольку OK – диаметр, а точка F лежит на окружности μ . Получаем, что прямая OF перпендикулярна PK , как и прямая OQ . Тогда O, F, Q лежат на одной прямой.

3. Треугольники PMS и PNB подобны.

Это следует из подобия треугольников PAC и PDB и равенства отношений

$$\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{NB}.$$

В заключение предлагаем читателям три задачи для самостоятельного решения.

1 (Турнир городов, 2015/16). Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Продолжения его противоположных сторон пересекаются в точках P и Q . Пусть K и N – середины диагоналей. Докажите, что сумма углов PKQ и PNQ равна 180° .

2 (Олимпиада Боснии и Герцеговины). Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O , а его диагонали пересекаются в точке K . Возьмем произвольную точку P на окружности с диаметром OK . Докажите, что прямая, проходящая через центры $\omega(ABP)$ и $\omega(CDP)$, делит OK пополам.

3 (Олимпиада Казахстана, 2017/18, областной этап). Диагонали AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Точки A_1, B_1, C_1 и D_1 выбраны на отрезках AO, BO, CO и DO соответственно так, что $AA_1 = CC_1, BB_1 = DD_1$. Пусть $\omega(AOD) \cap \omega(BOC) = M$, $\omega(AOB) \cap \omega(COD) = N$, $\omega(A_1OB_1) \cap \omega(C_1OD_1) = P$. Докажите, что точки M, N, P и Q лежат на одной окружности.

Литература

1. Г.Багдасарян. Поляры и Теорема Паппа. – «Квант», 2000, №3.
2. В.Протасов. Касающиеся окружности: От Тебо до Фейербаха. – «Квант», 2008, №4.