Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Белухов, Соседи на клетчатой решетке, *Квант*, 2018, номер 12, 34–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20181203>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 15:30:12

гии, находим скорость бочки:

$$v = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,985 \cdot 10^6 \text{ Дж}}{14,3 \text{ кг}}} = 371 \text{ м/с}.$$

Ничего себе! Действительно, получается солидный снаряд. Если бы на его пути не было препятствий (в виде пола, потолка, крыши и сундука, а также сопротивления воздуха), то бочка вознеслась бы на высоту

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{(371 \text{ м/с})^2}{2 \cdot 9,8 \text{ м/с}^2} = 7022 \text{ м}$$

– свыше 7 километров! Поэтому в целом следует признать, что создатели фильма не очень-то промахнулись. По крайней мере, в отношении разрушительной силы гремучей смеси. (Тимофей, по сюжету, после «выстрела» временно оглох. На самом деле едва ли все обошлось бы столь безобидно!)

Разумные читатели, конечно, вряд ли станут повторять сей эксперимент. Но поскольку при работе обычной газовой плиты всегда есть опасность погасания «факела» и образования именно гремучей смеси (состоящей, правда, не из ацетилена, а в основном из метана – но это несущественно), то можно сделать главный вывод: *соблюдайте правила безопасности при пользовании бытовыми газовыми приборами!*

БИБЛИО-ГЛОБУС
ВАШ ГЛАВНЫЙ КНИЖНЫЙ

**МЫ ПРЕДЛАГАЕМ
БОЛЬШОЙ ВЫБОР ТОВАРОВ И УСЛУГ**

УСЛУГИ	АССОРТИМЕНТ
■ Интернет-магазин www.bgshop.ru	■ Книги
■ Кафе	■ Аудиокниги
■ Клубные (дисконтные) карты и акции	■ Антиквариат и предметы коллекционирования
■ Подарочные карты	■ Фильмы, музыка, игры, софт
■ Предварительные заказы на книги	■ Канцелярские и офисные товары
■ Встречи с авторами	■ Цветы
■ Читательские клубы по интересам	■ Сувениры
■ Индивидуальное обслуживание	
■ Подарочная упаковка	
■ Доставка книг из-за рубежа	
■ Выставки-продажи	

г. Москва,
м. Лубянка,
м. Китай-город
ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1
8 (495) 781-19-00
www.biblio-globus.ru
пн – пт 9:00 – 22:00
сб – вс 10:00 – 21:00
без перерыва на обед

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Соседи на клетчатой решетке

Н. БЕЛУХОВ

ВЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ СОБИРАЕМСЯ ОБСУДИТЬ серию задач, близких по постановке к задаче M2500 («Квант» №2 за 2018 г.).

Начнем с такой задачи.

Задача 1. Дано натуральное число $n \geq 2$. Все натуральные числа от 1 до n^2 расстав-

ляются в клетки таблицы $n \times n$ произвольным образом. Скажем, что две клетки (а также числа, находящиеся в них) являются соседними (или соседями), если эти клетки имеют общую сторону. Найдите наименьшее натуральное d такое, что существует расстановка чисел, в которой все разности между соседями не превосходят d .

У этой задачи давняя интересная история. Ее первые предшественники, известные автору, – это задачи 2 для 8 класса и 4 для 9 класса заключительного этапа Московской олимпиады 1963 года, в которых для случаев $n = 8$ и $n = 9$ требовалось доказать оценки $d \geq 5$ и $d \geq 6$ соответственно. Затем в статье А. Орлова «Принцип Дирихле» («Квант» №7 за 1971 г.) ставился вопрос о нахождении наибольшего n , для которого $d \leq 5$. Возможно, самый первый источник, содер-

жащий решение для общего случая, – это статья М.Гервера «Задача о числах в таблице» («Квант» №12 за 1971 г.). Поводом для написания этой статьи стали упомянутые задачи про частные случаи. Затем, почти 20 лет спустя, общая задача (или, более точно, задача о доказательстве нижней оценки на d) была предложена от Чехословакии на Международную олимпиаду 1988 года (на саму олимпиаду задача не попала, но вошла в так называемый шорт-лист задач-кандидатов). А еще почти через 20 лет эта задача появилась (без указания источника) в известной книге Белы Боллобаша «Искусство математики» (The Art of Mathematics).

В задаче 1 несложно предъявить расстановку, в которой все разности между соседями не превосходят n : просто пронумеруем все клетки верхнего ряда слева направо, далее продолжаем нумеровать клетки следующего ряда и т.д. Тогда разность чисел в каждой паре клеток, соседствующих по горизонтали, равна 1, а разность чисел в каждой паре соседей по вертикали равна n .

Оказывается, $d = n$ – действительно правильный ответ. Чтобы завершить решение, нужно доказать, что в любой расстановке найдутся два соседа, отличающиеся не менее чем на n . Это сложная часть решения.

Сначала набрасаем «широкими мазками» подход к решению.

Зафиксируем некоторую расстановку A чисел в таблице. Теперь мы хотим ставить числа от 1 до n^2 в клетки пустой таблицы одно за другим, согласно расстановке A . Итак, вначале мы ставим число 1, затем 2, потом 3 и т.д. В какой-то момент мы дойдем до числа k (которое мы определим чуть позже) и остановимся. Пусть S – это множество из k клеток, которые мы заняли числами к моменту остановки. Рассмотрим множество T всех соседей множества S . Иначе говоря, T – множество всех клеток a , не лежащих в множестве S и имеющих хотя бы одну соседнюю клетку в множестве S . Представим себе, что нам удалось выбрать «время остановки» k таким образом, чтобы множество T содержало не менее n клеток. Тогда наибольшее число b , находящееся (в расстановке A) в клетке множества T , должно быть не меньше $k + n$. Пусть c – число в клетке множества S , соседней с b . Тогда $c \leq k$. Поэтому разность $b - c$ не меньше n , что мы

и хотели получить. Все, что нам осталось сделать, это объяснить, как выбрать подходящее время остановки k и доказать, что выбранное k действительно подходит.

На этом месте в решении нам нужно выбрать один из двух подходов. Если мы выберем k каким-то простым способом, то взамен получим сложности с доказательством того, что данное k подходит. Наоборот, мы можем попробовать выбрать k весьма нетривиальным образом, чтобы облегчить доказательство того, что оно подходит. Посмотрим, куда приведет нас каждый из этих подходов.

Первое решение. (Это решение фактически опирается на упражнение 3 из упомянутой статьи М. Гервера.) Определим k явным образом как

$$k = 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n^2 - n}{2}.$$

Теперь нужно показать, что множество T содержит не менее n клеток (для выбранного таким образом k).

Покажем, как это вытекает из следующей леммы, используемой в авторском решении задачи M2500 (см. «Квант» №9 за 2018 г.).

Лемма. Пусть из таблицы $n \times n$ вырезали $n - 1$ клетку. Тогда среди связанных частей, на которые распалась таблица, найдется часть, содержащая не менее $\frac{n^2 + n}{2}$ клеток.

Итак, предположим противное, и T содержит не более $n - 1$ клеток. Удалим все клетки множества T . Тогда каждая компонента связности C оставшейся части таблицы – либо подмножество множества S , либо не пересекается с $S \cup T$. В первом случае C содержит не более $|S| = \frac{n^2 - n}{2}$ клеток. Во втором случае C содержит не более $n^2 - |S| - |T| \leq n^2 - \frac{n^2 - n}{2} - 1 = \frac{n^2 + n}{2} - 1$ клеток. Однако, согласно лемме, одна из компонент, на которые распадается оставшаяся часть таблицы, должна содержать не менее $\frac{n^2 + n}{2}$ клеток!

Мы пришли к противоречию, завершающему решение.

Второе решение. (Ход этого решения в целом соответствует изложению в статье М.Гервера.)

В этом решении мы выберем время остановки k более тонко.

Пока мы заполняем таблицу, расставляя числа одно за другим, мы собираемся проследить, когда впервые выполнится некоторое условие, и ровно перед этим моментом мы сделаем остановку. А условие заключается в следующем: найдется целиком заполненный числами ряд (столбец или строка). Иными словами, мы останавливаемся в тот момент, когда после выставления чисел $1, 2, \dots, k$ каждый ряд все еще содержит хотя бы одну незаполненную клетку, но это условие нарушилось бы после постановки числа $k + 1$. (Отметим, что в отличие от первого решения задачи 1 время остановки здесь существенно зависит от расстановки A .) Покажем, что T содержит хотя бы n клеток, если мы выбираем k указанным способом.

Пусть e — это клетка, в которой должно стоять число $k + 1$ (согласно расстановке A). По нашему выбору числа k заполнение клетки e сделало бы полностью заполненным ряд, содержащий клетку e . Для определенности считаем, что после заполнения клетки e заполняется целиком ее строка R , т.е. все клетки в ряду R , кроме самой клетки e , принадлежат множеству S . Рассмотрим любой столбец C , отличный от столбца, в котором находится e . Общая клетка R и C принадлежит S . С другой стороны, в момент k столбец C еще не полностью заполнен числами, значит, хотя бы одна клетка из C не принадлежит S . Таким образом, C содержит как клетки из S , так и клетки, не принадлежащие S . Поэтому в C находится хотя бы одна клетка из T . В столбце, который содержит клетку e , тоже есть клетка из T — это сама клетка e . Следовательно, каждый из n столбцов содержит хотя бы одну клетку из множества T . Тем самым, T содержит хотя бы n клеток, что завершает решение.

Задача 1 является «общим предком» для большого семейства связанных друг с другом задач. Идея выбора времени остановки работает во многих из них. Иногда можно определить время остановки k довольно простым способом и потратить больше сил на доказательство того, что оно подходит. В других случаях лучше с большей аккуратностью выбирать k , чтобы облегчить себе работу в доказательстве того, что это k подходит.

Задача 2. Пусть n — четное натуральное число. Все натуральные числа от 1 до n^2 расставляются в клетки таблицы $n \times n$ произвольным образом. Скажем, что две клетки (а также числа, находящиеся в них) являются соседними, если эти клетки находятся в одной строке или в одном столбце. Найдите наименьшее натуральное d такое, что существует расстановка чисел, в которой все разности между соседями не превосходят d .

Эта задача предлагалась на заключительном этапе Всероссийской олимпиады 2002/03 учебного года (задача 8 для 10 класса). В оригинальной формулировке $n = 20$, и в задаче требовалось найти наибольшее натуральное d такое, что каждая расстановка содержит два соседних числа, отличающихся не менее чем на d .

В качестве указания¹ предьявим подходящее время остановки $k = \frac{n^2}{4} + 1$.

(Что происходит в задаче 2 для нечетных n ?)

Задача 3. Пусть n — нечетное натуральное число. Рассмотрим таблицу $n \times n$. Левый край таблицы приклеивается к ее правому краю, а верхний — к нижнему, так что таблица приобретает форму тора (бублика). Все натуральные числа от 1 до n^2 расставляются в клетки таблицы произвольным образом. Скажем, что две клетки (а также числа, находящиеся в них) являются соседними, если эти клетки имеют общую сторону. (Заметим, что из-за склейки в каждой строке самая левая и самая правая клетки соседние и, аналогично, в каждом столбце самая верхняя и самая нижняя клетки соседние. Таким образом, у каждой клетки ровно четыре соседа.) Найдите наименьшее натуральное d такое, что существует расстановка чисел, в которой все разности между соседями не превосходят d .

Эта задача предлагалась на олимпиаде Romanian Masters в 2011 году (задача 6). В оригинальной формулировке $n = 2011$ и требовалось найти

¹ Указания и замечания к задачам 2–5 следуют официальным решениям, предлагавшимся на олимпиадах. Найти подробные решения читатель может в соответствующих источниках.

наибольшее натуральное d такое, что каждая расстановка содержит два соседних числа, отличающихся не менее чем на d .

Указание. Остановиться надо в последний момент, для которого либо в каждой строке не менее двух незанятых клеток, либо в каждом столбце не менее двух незанятых клеток.

(Что меняется в задаче 3 для четных n ?)

Задача 4. Пусть n – четное натуральное число. Все натуральные числа от 1 до n^2 расставляются в клетки таблицы $n \times n$ произвольным образом. Скажем, что две клетки (a также числа, находящиеся в них) являются соседними, если эти клетки имеют общую сторону. Найдите наименьшее натуральное d такое, что существует расстановка чисел, в которой все суммы в парах соседних чисел не превосходят d .

Это задача с заключительного этапа Всероссийской олимпиады 1996/97 учебного года (задача 8 для 9 класса). В оригинальной формулировке $n = 10$.

Приведем набросок решения этой задачи. Вначале разрежем таблицу на $\frac{n}{2}$ прямоугольных горизонтальных полосок $2 \times n$. Аналогично разрежем таблицу на $\frac{n}{2}$ вертикальных полосок $n \times 2$. Можно доказать следующую лемму (применяя подход с выбором фиксированного момента остановки).

Лемма. Пусть $l \leq n - 1$ – натуральное число. Предположим, что некоторая полоска F содержит ровно l клеток из S , никакие две из которых не являются соседними. Тогда F также содержит хотя бы $l + 1$ клеток из T .

Теперь, используя два разрезания таблицы на полоски и утверждение леммы, можно перейти собственно к решению.

Мы будем расставлять числа от n^2 до 1 одно за другим в порядке убывания, т.е. вначале мы ставим число n^2 , затем $n^2 - 1$, потом $n^2 - 2$ и т.д. Применим подход с выбором «плавающего» момента остановки. Мы остановимся ровно в тот момент, когда в каждой горизонтальной и в каждой вертикальной полоске будет заполнена хотя бы одна клетка. В случае если к этому моменту нашлись уже заполненные соседние клетки, то несложно показать, что сумма чисел в

некоторых двух соседях достаточно большая (больше верного ответа).

В случае, когда среди заполненных клеток нет двух соседних, можно завершить решение, используя лемму.

(Что происходит в задаче 4 для нечетных n ?)

Кроме выбора времени остановки, есть и совершенно другие подходы, которые иногда работают эффективнее.

Задача 5. Пусть $n \geq 2$ – натуральное число. Все натуральные числа от 1 до n^2 расставляются в клетки таблицы $n \times n$ произвольным образом. Скажем, что две клетки (a также числа, находящиеся в них) являются соседними, если эти клетки имеют общую сторону или вершину. Найдите наименьшее натуральное d такое, что существует расстановка чисел, в которой все разности соседних чисел не превосходят d .

Это задача с Турнира городов 1990/91 учебного года (осенний тур, задача 1 тренировочного варианта для 10 и 11 классов). В оригинальной формулировке требовалось доказать точную нижнюю оценку на d .

Указание. Пусть имеется расстановка чисел, в которой все разности соседних чисел не превосходят d . Пусть шахматному королю требуется s ходов, чтобы пройти из некоторой клетки a в клетку b . Оцените сверху разность между числами, находящимися в клетках a и b . Далее получите нижнюю оценку на d , рассмотрев клетки с числами 1 и n^2 .

Подводя итоги, давайте еще раз посмотрим, какие изменения происходят в формулировках задач 2–5 по сравнению с задачей 1.

В задачах 2 и 5 мы меняем определение «соседства». В задаче 2 две клетки считаются соседними тогда и только тогда, когда они отстоят друг от друга на ход ладьи. А в задаче 5 две клетки по определению соседние, если отстоят друг от друга на ход короля.

Есть много естественных способов определить, какие пары клеток называть соседними. Мы также можем определить соседство с точки зрения ходов других шахматных фигур, например коня, ферзя, или фигур из сказочных шахмат. Так, (p, q) –

скакуном называют фигуру, которая может за ход сдвигаться на p клеток вдоль одного направления (по горизонтали или по вертикали) и на q клеток вдоль перпендикулярного направления (скажем, обычный шахматный конь является $(1, 2)$ -скакуном). Или, например, рассмотрим (p, q) -гонщика, который может ходить, как (kp, kq) -скакун, для любого натурального k (так, ладья – это $(0, 1)$ -гонщик).

Далее, в задаче 3 мы меняем форму решеток.

Снова отметим: имеется много других решеток, на которых можно рассматривать ту же постановку задачи. Кроме обычной прямоугольной и торической решеток, можно рассмотреть решетки на других поверхностях: на цилиндре, на ленте Мёбиуса, на бутылке Клейна. Можно также рассматривать пространственные решетки и далее изучать многомерные решетки. Или можно ис-

следовать другие разбиения, такие как треугольная сетка или шестиугольные «соты». И так далее.

Наконец, в задаче 4 мы занимались суммами (вместо разностей) чисел в соседних клетках. Конечно, ничто не мешает нам изучать и другие операции, например деление или умножение.

Все указанные вариации постановки задачи могут по-разному комбинироваться друг с другом.

Задача M2500 – одно из самых недавних добавлений в это постоянно растущее семейство. По сравнению с задачей 1, в ней изменен еще один параметр. В задаче 1 мы хотим, чтобы все разности между числами в соседних клетках были как можно меньше, а в задаче M2500 мы желаем сделать все эти разности как можно больше. Наверное, не нужно говорить, какие новые постановки задач получаются, если комбинировать эту вариацию с перечисленными ранее.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Диффузия: кого, куда и вообще

Л. АШКИНАЗИ

В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ФИЗИКИ ОБЫЧНО упоминаются два примера диффузии – кусок свинца и кусок золота, которые прижали друг к другу, и флакон с духами, который открыли в комнате. Первая ситуация намного сложнее, чем кажется, а во второй ситуации запах распространяется в основном вообще не из-за диффузии. Объединяет же эти две ситуации то, что в обоих случаях происходит распространение одного вещества в другом. Но для того чтобы можно было говорить о диффузии, даже это не обязательно! Потому что есть понятие

самодиффузия. С другой стороны, не всякое распространение стоит называть диффузией. Однако, попробуем рассказать об этом по порядку.

Начнем именно с этой самой самодиффузии. Которых есть даже две – объемная и поверхностная. Пусть у нас имеется кусок вещества и пусть все его атомы одинаковы. Эти атомы колеблются вокруг положений равновесия, причем амплитуды колебаний сами могут изменяться. Вот некоторый атом так сильно отклонился от положения равновесия, что вообще не вернулся обратно, а переместился в другое «устойчивое положение» и, естественно, занялся колебаниями вокруг него.

В этом месте критически мыслящий школьник должен задать вопрос: оба процесса зависят от времени, как мы их разделим? Может, атом вообще только и делает, что прыгает? Ответ звучит так: оцените и сравните время колебания атома в решетке и среднее время перескока атома в соседнее положение. Очень грубая приближенная оценка дает для этих времен значения 10^{-12} с и 10^{-5} с соответственно. Таким образом, атом перемещается в соседнее положение,