Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Долбилин, Г. Ф. Вороной и геометрия чисел, *Квант*, 2019, номер 1, 12–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20190102>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 12:37:06

Г. Ф. Вороной и геометрия чисел

Н. ДОЛБИЛИН

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ ПОСТАРАЕМСЯ описать общие контуры геометрии чисел – науки, которой Георгий Феодосьевич посвятил самые глубокие свои работы. Одна из них – о плотнейших упаковках шаров в многомерных пространствах – появилась на последнем году жизни. Другая – по теории параллелоэдров – была опубликована уже посмертно.

Перенесемся в 1904 год, когда в живописном немецком городе Гейдельберге состоялся третий Международный конгресс математиков. На этот конгресс пригласили выступить с докладом и Георгия Феодосьевича Вороного и Генриха Минковского (1864–1909), одного из крупнейших геометров XIX века. «Приглашенный доклад» на международном конгрессе – это очень престижное предложение, которого удостоиваются математики, добившиеся выдающихся результатов.

Минковский за 8 лет до этого, в 1896 году, опубликовал знаменитую работу «Геометрия чисел» (по-немецки «Geometrie der Zahlen»), в которой заложил основы новой области математики – геометрии чисел. Основная идея этой науки, находящейся на стыке геометрии и теории чисел, состоит в том, что в теории чисел есть немало задач, которые можно переформулировать на геометрическом языке, после чего задача становится более прозрачной и появляется возможность применять геометрические методы для ее решения. Самая известная, пожалуй, геометрическая теорема, которая помогает решать задачи по теории чисел, – это теорема Минковского о центрально-симметричном выпуклом теле (фигуре).

Рассмотрим на плоскости прямоугольную систему координат (x, y) и множество всех целых точек, т.е. точек, у которых обе координаты – целые числа. Это множество называется *квадратной решеткой* (рис.1).

Рис. 1

Далее, фигура $\mathcal{F}$ называется *выпуклой*, если для любых двух точек A и B из $\mathcal{F}$ соединяющий их отрезок $[AB]$ целиком принадлежит фигуре. Фигура $\mathcal{F}$ имеет *центр симметрии*, т.е. такую точку $O \in \mathcal{F}$, если для всякой точки $X \in \mathcal{F}$ симметричная ей относительно O точка X' также принадлежит фигуре $\mathcal{F}$. Фигура с центром симметрии называется *центрально-симметричной*.

Например, круг является выпуклой центрально-симметричной фигурой, а треугольник – выпуклой, но не центрально-симметричной. Знаменитая теорема Минковского утверждает:

Пусть центр симметрии O расположен в точке решетки. Тогда если площадь фигуры $s(\mathcal{F}) \geq 4 = 2^2$, то внутри или на границе фигуры содержится хотя бы одна пара симметричных относительно O точек решетки, отличных от точки O .

Теорема Минковского верна для любой размерности, в том числе и для кубической решетки в трехмерном пространстве. Только в этом случае речь идет о выпуклом центрально-симметричном теле $\mathcal{F}$, объем которого $v(\mathcal{F}) \geq 8 = 2^3$.

Вороной и Минковский встретились и беседовали во время конгресса. Борис Николаевич Делоне слышал от отца, который тоже был приглашен на этот конгресс, что Минковский отнесся к Вороному и его работам с огромным интересом и величайшим уважением.

Геометрия чисел по духу была близка Вороному всегда: вспомним слова Делоне о том, что Вороной мыслил геометрически. В 1908 году по окончании работы над мемуаром по теории параллелоэдров Вороной писал, что работать над ним он начал лет за 12 до того, т.е. в то время, когда Минковский работал над своей «Геометрией чисел». Но полностью Георгий Феодосьевич переключился на геометрию чисел лишь после 1904 года.

Положительные квадратичные формы

Вороной создал важный метод в геометрии чисел – геометрию положительных квадратичных форм и применил ее к решению двух труднейших проблем: проблемы нахождения плотнейшей упаковки пространства равными шарами и проблемы отыскания параллелоэдров в пространствах произвольной размерности. Здесь уместно сказать, что эти проблемы в многомерных пространствах имеют не только чисто математический интерес, но и важные приложения, например в теории кодирования.

Сейчас мы постараемся объяснить связь между положительными квадратичными формами и упаковками шаров на примере плоскости. В случае двух измерений мы имеем дело с квадратичными формами от двух переменных и упаковками плоскости равными кругами.

Напомним, квадратичная форма $f(x, y)$ от двух переменных – это однородный многочлен 2-й степени вида

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2. \quad (1)$$

Квадратичная форма $f(x, y)$ называется *положительно определенной* или просто *положительной*, если $f(x, y) > 0$ для всех $(x, y) \neq (0, 0)$. Например, форма $x^2 + y^2$ очевидно является положительной, в то время как форма $x^2 + 2xy + y^2$ не является положительной. Заметим, что последняя форма $f = (x + y)^2$, несмотря на то, что никогда не принимает отрицательных значений, не является положительной, потому что обращается в ноль в точках (x, y) при условии $x = -y$.

По коэффициентам формы $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ можно определить, положительная она или нет. Как это сделать в общем случае n переменных, излагается в университетском курсе алгебры. Но в случае двух переменных можно обойтись и «школьными» средствами. Докажем, что форма $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ – *положительная, если $a > 0$ и $ac - b^2 > 0$* .

Для доказательства рассмотрим сначала все пары (x, y) с $y = 0$, т.е. пары $(x, 0)$, где $x \neq 0$. Так как $a > 0$, то $f(x, 0) = ax^2 > 0$ для любого $x \neq 0$. Пусть теперь $y \neq 0$. Тогда, обозначив $t = \frac{x}{y}$, имеем

$$f(x, y) = y^2(at^2 + 2bt + c). \quad (2)$$

Сомножитель $at^2 + 2bt + c$ в (2) одного знака при всех t , так как этот квадратный трехчлен не имеет корней (в силу того, что дискриминант $b^2 - ac$ отрицателен). Этот трехчлен положителен, поскольку старший коэффициент $a > 0$.

Упражнение. Докажите обратное утверждение: если форма $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ положительная, то $a > 0$ и $ac - b^2 > 0$.

Положительные формы и расстояния

Ключевая идея геометрии положительных квадратичных форм, кратко ПКФ, состоит в том, что значение ПКФ $f(x, y)$ есть квадрат длины вектора $\overrightarrow{OA}$ или, что то же самое, есть квадрат расстояния от начала O до точки A с координатами (x, y) .

Рассмотрим для примера две конкретные ПКФ:

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{и}$$

$$f_2(x, y) = x^2 + xy + y^2.$$

Сумма квадратов $f_1(x, y) = x^2 + y^2$ есть ПКФ и задает квадрат расстояния $|OA|$ от начала $O = (0, 0)$ до точки $A = (x, y)$ в прямоугольной системе координат. Что касается формы $f_2 = x^2 + xy + y^2$, то ее положительность следует из того, что для ее коэффициентов оба неравенства $a = 1 > 0$ и $ac - b^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0$ выполняются.

Хотя это и не очевидно, форма $f_2(x, y)$ также задает расстояние $|OA|$, но только если координаты (x, y) точки A рассматриваются относительно другой, вообще говоря не прямоугольной, системы координат, приспособленной к данной форме.

Произвольная система координат на плоскости задается упорядоченной парой векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, исходящих из одной точки (начала O) и не лежащих на одной прямой (рис.2). Такую пару векторов часто называют *репером*.

Рис. 2

Векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ определяют две прямые Oe_1 и Oe_2 . Через точку A на плоскости проведем прямую, которая параллельна второй прямой Oe_2 . Она пересекает прямую Oe_1 в некоторой точке A_1 . Так как векторы $\overrightarrow{OA_1}$ и $\vec{e}_1$ коллинеарны, т.е. лежат на одной прямой, то для них имеем $\overrightarrow{OA_1} = x \cdot \vec{e}_1$, где x – вполне определенное число, называемое *координатой* точки A_1 на прямой. Проведем через A прямую, параллельную первой прямой Oe_1 . Она пересекает прямую Oe_2 в точке A_2 . Точно так же, как и в первом случае, $\overrightarrow{OA_2} = y \cdot \vec{e}_2$, а число y является координатой точки A_2

на прямой Oe_2 . Упорядоченная пара чисел (x, y) и есть *координаты* вектора $\overrightarrow{OA}$ (или координаты его конца – точки A) относительно репера $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

Далее, форме $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + y^2$ сопоставим репер $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ такой, что

$$|\vec{e}_1|^2 = a, \quad |\vec{e}_2|^2 = c, \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = b. \quad (3)$$

Напомним, что $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2$ означает скалярное произведение двух векторов, т.е. $|\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_2| \cdot \cos \angle \vec{e}_1 \vec{e}_2$. Таким образом, по форме $f(x, y)$ задается репер, у которого заданы длины его векторов и угол между ними. Тем самым репер задан однозначно с точностью до движения.

В частности, форме $f_1(x, y) = x^2 + y^2$ соответствует репер, задающий прямоугольную систему координат. А репер, соответствующий форме $f_2(x, y) = x^2 + xy + y^2$, состоит из единичных векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ с углом 60° между ними, так как $(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) = \cos \angle \vec{e}_1 \vec{e}_2 = b = \frac{1}{2}$.

Важно, что в системе координат репера, заданного в (3), квадрат длины отрезка OA равен значению формы $f(x, y)$, где (x, y) – координаты точки A :

$$f(x, y) = |OA|^2. \quad (4)$$

Действительно, мы имеем

$$\begin{aligned} |OA|^2 &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} = \\ &= (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) \cdot (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) = \\ &= x^2(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) + 2xy(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) + y^2(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2) = \\ &= ax^2 + 2bxy + y^2. \end{aligned}$$

При выводе равенства (4) мы воспользовались тремя известными из школьной программы свойствами скалярного произведения векторов: свойствами распределительности, перестановочности и вынесения постоянного множителя.

Решетки

В теории чисел мы имеем дело с решениями уравнений в целых числах. В связи с этим для данного репера рассмотрим на плоскости множество Λ всех точек, обе координаты которых относительно этого репера – целые числа. Это множество

называется (произвольной) *решеткой*. Квадратная решетка является частным случаем произвольной решетки.

Итак, по каждой положительной квадратичной форме можно построить репер, по которому, в свою очередь, однозначно строится решетка:

$$f(x, y) \rightarrow \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \rightarrow \Lambda.$$

Например, для формы $f_1 = x^2 + y^2$ решетка Λ_1 построена на единичном квадрате (см. рис.1). Получающаяся для формы $f_2 = x^2 + xy + y^2$ решетка Λ_2 построена, как иногда говорят, на правильном треугольнике.

Чтобы лучше представить решетку, нужно взять параллелограмм, построенный на векторах репера (рис.3), так называемый

Рис. 3

основной параллелограмм решетки, и рассмотреть разбиение плоскости на основные параллелограммы. Узлы полученной параллелограммной сетки и есть решетка.

Отметим, что соответствие между реперами и решетками однозначно только в одну сторону: каждому реперу соответствует единственная решетка Λ . Обратное неверно: в данной решетке Λ можно выбрать бесконечно много других реперов таких, что построенная на них решетка совпадает с Λ (рис.4). Основные параллелограммы, т.е. построенные на реперах данной решетки, как нетрудно видеть,

Рис. 4

имеют одинаковую площадь s , причем $s^2 = ac - b^2$. В частности, для квадратной решетки Λ_1 $s = 1$, а для решетки Λ_2 , построенной на правильном треугольнике, $s = \sqrt{3}/2$.

Подчеркнем, что теорема Минковского о выпуклой центрально-симметричной фигуре $\mathcal{F}$ справедлива для любой решетки, не только квадратной. При этом нужно только потребовать, чтобы площадь фигуры $s(\mathcal{F}) \geq 4s$, где s – площадь основного параллелограмма данной решетки.

Упаковка плоскости кругами

Для положительной формы $f(x, y)$ определим ее *арифметический минимум* m_f как $\min f(x, y)$ по всем целым $(x, y) \neq (0, 0)$.

Рассмотрим теперь теоретико-числовую задачу: для данной ПКФ $f(x, y)$ нужно найти ее арифметический минимум m_f и все целые решения уравнения

$$f(x, y) = m_f. \quad (5)$$

Переведем эту задачу на геометрический язык. По форме f находим репер (3) и решетку Λ_f . Тогда арифметический минимум m_f равен квадрату расстояния от O до ближайшей точки решетки. Целые решения уравнения (5) – это координаты точек решетки, ближайших к O .

Если в каждую точку решетки Λ_f поместить центр круга, радиус которого равен половине расстояния до ближайшей точки, т.е. $\frac{1}{2}\sqrt{m_f}$, то некоторые соседние круги будут касаться, но никакие круги не будут перекрываться. Системы попарно неперекрывающихся кругов называются *упаковками*. Так как в данном случае центры кругов образуют решетку, такая упаковка называется *решетчатой*. Причем радиус кругов $r_f = \frac{1}{2}\sqrt{m_f}$ – максимально возможный для данной решетки, так как любое увеличение радиуса ведет к тому, что соседние круги начнут перекрываться.

Какова доля плоскости, покрытой кругами радиуса r_f ? Эта доля, или, как говорят, *плотность* δ_f решетчатой упаковки, равна отношению площади круга к пло-

щади s_f основного параллелограмма решетки:

$$\delta_f = \frac{\pi r_f^2}{s_f}. \quad (6)$$

В частности, если центры кругов образуют квадратную решетку Λ_1 , то $\delta_1 = \frac{\pi}{4} = 0,7853\dots$ В случае правильной треугольной решетки Λ_2 плотность упаковки больше: $\delta_2 = \pi/(2\sqrt{3}) = 0,9068\dots$

Нетрудно показать при помощи чисто геометрических средств, что среди решетчатых упаковок плоскости кругами плотнейшая упаковка достигается именно на правильной треугольной решетке Λ_2 .

Плотнейшие упаковки пространства шарами

Мы подошли к началу дороги, ведущей к одной из центральных задач всей геометрии чисел: как найти самую плотную решетчатую упаковку многомерного пространства равными шарами. Кстати, эта задача, известная для плоскости и пространства еще со времен Древней Греции, является актуальной и для больших размерностей из-за ее связи с задачами кодирования.

Начиная с работы великого К.Ф.Гаусса вплоть до нашего времени плотнейшие решетчатые упаковки были найдены только для размерностей $d \leq 8$ и $d = 24$.

К сожалению, методы нахождения плотнейших упаковок в пространствах малых размерностей перестают «работать» для больших размерностей. Интуиция, выработанная в трехмерном пространстве, оказывается бессильной по отношению к этой задаче для пространств больших размерностей. Искренне удивляет, насколько сильно максимальная плотность упаковки пространства шаров убывает в зависимости от размерности пространства. Так, на плоскости максимальная плотность упаковки кругов равна 0,9069... В трехмерном пространстве максимальная плотность упаковки шаров равна 0,7404..., в 8-мерном – 0,2536... В 24-мерном пространстве максимальная плотность упаковки – только 0,0019...! Другими словами, никакая

упаковка 24-мерных шаров не может занимать даже 0,2% пространства!

Работа Вороного об упаковках шаров

Вороному удалось создать метод нахождения плотнейшей решетчатой упаковки d -мерного пространства равными шарами для любой размерности.

Для этого Вороной рассмотрел конус ПКФ, состоящий из точек, представляющих положительные квадратичные формы от d переменных. Размерность этого конуса равна числу коэффициентов $\frac{d(d+1)}{2}$ в квадратичной форме.

Среди форм конуса Вороной выделил совершенные формы. Совершенная форма – это ПКФ, имеющая столь много арифметических минимумов, что ее коэффициенты задаются координатами (x, y) этих минимумов однозначно (с точностью до общего множителя).

Например, форма $f_1(x, y) = x^2 + y^2$ имеет две пары арифметических минимумов $\pm(1, 0)$ и $\pm(0, 1)$ и не является совершенной. Форма $f_2(x, y) = x^2 + xy + y^2$ имеет три пары арифметических минимумов $\pm(1, 0)$, $\pm(0, 1)$ и $\pm(-1, 1)$. По этим трем парам форма $f_2(x, y)$ определяется однозначно (с точностью до общего множителя), т.е. форма $f_2(x, y)$ является совершенной.

Вороной получил для совершенных форм три результата. Во-первых, он доказал, что форма, отвечающая плотнейшей упаковке, является совершенной. Во-вторых, он установил, что совершенных форм от данного числа переменных – конечное число. И самое главное, в-третьих, Вороной предложил метод нахождения всех совершенных форм. Этот метод опирается на так называемый совершенный полиэдр, весьма сложный многомерный многогранник, введенный Вороным. В принципе, найдя методом Вороного все совершенные формы, можно вычислить плотности для конечного числа соответствующих упаковок и выделить те, которые отвечают максимальному значению.

Хотя применение метода Вороного для больших размерностей связано с огромными вычислениями, которые трудно реализовать даже на современных вычислительных машинах, метод Вороного был и остается единственным методом решения этой задачи, который годится для пространств любой размерности.

Параллелоэдры

Последний мемуар Вороного, как было сказано, посвящен теории параллелоэдров. *Параллелоэдр* – это выпуклый многогранник, копиями которого, прикладываяемыми друг к другу по целым граням, можно заполнить пространство без пропусков и попарных перекрытий; при этом предполагается, что параллелоэдры не только конгруэнтны, но и параллельны друг другу, т.е. получаются друг из друга параллельными переносами.

В силу параллельности многогранников друг другу и их прилегания по целым граням, каждая грань параллелоэдра имеет равную и параллельную ей противоположную грань. Отсюда и название параллелоэдр, т.е. параллелограмм, которое дал им великий кристаллограф Евграф Степанович Федоров (1857–1919). Федоров начал изучать параллелоэдры в 1885 году из-за их значимости в кристаллографии. Действительно, разбиение пространства на параллелоэдры хорошо моделирует структуру кристалла, которая, как известно, периодическая в трех измерениях.

Двумерный аналог параллелоэдров называют *параллелогоном*. Параллелогон – это выпуклый многоугольник, параллельными копиями которого можно замостить плоскость, прилагая их друг к другу по целым сторонам. Поэтому параллелогон – это многоугольник с четным числом сторон, у которого каждая сторона имеет равную и параллельную пару.

Параллелогон, как легко показать, является центрально-симметричным многоугольником с четырьмя сторонами (т.е. параллелограммом) или с шестью сторонами. Легко видеть, что верно и обратное: любой центрально-симметричный многоугольник одного из этих двух типов (четы-

рехугольник или шестиугольник) является параллелогоном.

Все типы трехмерных параллелоэдров, а их оказалось пять, были найдены Федоровым (рис. 5; см. также «Калейдоскоп «Кванта»»). На рисунке 5 фигура I – куб, II – шестиугольная призма, III – ромбододекаэдр, IV – вытянутый додекаэдр, V – усе-

Рис. 5

ченный октаэдр. На самом деле, точнее было бы говорить здесь не о пяти параллелоэдрах, а о пяти комбинаторных типах параллелоэдров. Как показали российские математики А.Д.Александров (1912–1999) и Б.А.Венков (1900–1964), каждый тип помимо указанного параллелоэдра содержит многогранники, устроенные точно так же, как и указанный представитель, у которых, подчеркнем, все грани центрально-симметричны.

Это означает, например, что в тип I помимо куба входят также и все параллелепипеды. А в тип II входят все призмы с центрально-симметричными шестиугольными основаниями и боковыми гранями-параллелограммами.

При выводе всех пяти типов параллелоэдров Федоров предполагал, что параллелоэдр — обязательно центрально-симметричный. Несмотря на имевшиеся аргументы в пользу этого предположения, строгого доказательства у Федорова не было. В отличие от двухмерного случая, доказательство центральной симметричности трехмерного параллелоэдра не так просто.

Г. Минковский после работы Федорова о параллелоэдрах заинтересовался этим классом многогранников, причем произвольной размерности. Попытка доказать центральную симметричность параллелоэдра привела Минковского к открытию одной из самых прекрасных теорем в теории выпуклых многогранников — теоремы о существовании и единственности выпуклого многогранника с данными направлениями граней и их площадями. Из этой сложно доказываемой теоремы Минковский легко вывел следующие первые два свойства параллелоэдров, к которым позже было добавлено третье (Б.Н. Делоне):

1) *параллелоэдр — центрально-симметричный многогранник;*

2) *все грани параллелоэдра — центрально-симметричные многоугольники;*

3) *проекция параллелоэдра вдоль любого его ребра на перпендикулярную к нему плоскость есть либо параллелограмм, либо центрально-симметричный шестиугольник.*

Причем все три свойства верны для параллелоэдров любой размерности. Разумеется, для параллелоэдров размерности $d \geq 4$ свойства 2) и 3) должны быть отредактированы. Так, в условии 2) должно быть: «все грани размерности $d - 1$ — центрально-симметричные многогранники»; а в условии 3) речь должна идти о проекции параллелоэдра вдоль любой его $(d - 2)$ -мерной грани на перпендикулярную к ней плоскость.

Значительно позже, в 1954 году, Б.А. Венков доказал, что эти три условия являются не только необходимыми, но и достаточными: любой выпуклый многогранник, удовлетворяющий условиям 1)–3), является параллелоэдром.

Параллелоэдры Вороного

Как устроены параллелоэдры в пространствах произвольной размерности? Как найти все параллелоэдры, точнее все комбинаторные типы параллелоэдров?

Именно этой проблеме был посвящен последний мемуар Вороного. В нем Георгий Феодосиевич построил теорию параллелоэдров особого вида, называемых теперь параллелоэдрами Вороного.

Пусть Λ — произвольная решетка (рис. 6, а). Областью Вороного данной точки A в решетке Λ называется множество V_A

Рис. 6

всех точек X плоскости, которые находятся от точки $A \in \Lambda$ не дальше, чем от остальных точек B решетки Λ :

$$|XA| \leq |XB| \text{ для всех } B \in \Lambda, B \neq A.$$

Для того чтобы построить область Вороного, в принципе нужно соединить данную точку A с каждой точкой $B \in \Lambda$ и провести срединный перпендикуляр к отрезку $[AB]$. Срединный перпендикуляр делит плоскость на две полуплоскости. Полуплоскость, содержащая точку A , состоит из тех точек X плоскости, которые расположены к A ближе, чем к B . Та часть плоскости, которая принадлежит всем таким полуплоскостям (пересечение полуплоскостей), и есть область Вороного для точки A .

Согласно определению, область Вороного есть пересечение бесконечного числа полуплоскостей. В действительности же в построении области Вороного участвуют лишь конечное число срединных перпендикуляров, соответствующих относительно близким к A точкам B из Λ . Другими словами, область Вороного V_A есть выпуклый многоугольник, образованный несколькими срединными перпендикуляра-

ми. Если построить теперь область Вороного V_B для каждой точки B решетки Λ , то очевидно получим равные и параллельные друг другу многоугольники, которые заполняют плоскость без пропусков и перекрытий (рис.6,б).

Таким образом, согласно определению, область Вороного точки для решетки на плоскости есть параллелогон. Совершенно аналогично, для решетки в пространстве область Вороного есть трехмерный многогранник – параллелеоэдр, называемый в наше время *параллелеоэдром Вороного*.

Надо сказать, что идея области Вороного для дискретных множеств восходит к временам Декарта (1596–1650). В XIX веке концепцию области Вороного в двумерном случае активно использовал знаменитый немецкий математик Дирихле и на протяжении более века эти области назывались областями Дирихле. Но самые глубокие результаты об этих областях, причем для произвольной размерности, были получены Г.Ф.Вороным, и в настоящее время эти области называют в его честь.

Невозможно в рамках статьи описать теорию параллелеоэдров, построенную Вороным. Скажем, что она, в частности, содержит метод нахождения всех типов параллелеоэдров Вороного для любой размерности. Как соотносится решение этой более узкой задачи к задаче нахождения типов всех параллелеоэдров вообще?

Дело в том, что не каждый параллелеоэдр является параллелеоэдром Вороного. Так, среди параллелограммов только прямоугольники являются областями Вороного (рис.7,а). Центально-симметричный шестиугольник является областью Вороного тогда и только тогда, когда он вписан в окружность (рис.7,б). Тем не менее, для

Рис. 7

пространств размерности $d = 2, 3$ и 4 найдены все типы параллелеоэдров. Число типов для этих размерностей равно 2, 5 и 52 соответственно, причем установлено, что каждый из этих типов может быть реализован как область Вороного.

Георгий Феодосьевич предположил, что это верно для параллелеоэдров любой размерности d , т.е. любой параллелеоэдр размерности d устроен так же, как некоторый параллелеоэдр Вороного.

Для тех, кто знаком с понятием аффинного преобразования, уточним смысл гипотезы Вороного: для всякого параллелеоэдра существует аффинное преобразование, которое переводит этот параллелеоэдр в некоторый параллелеоэдр Вороного.

Если гипотеза подтвердится, то метод Вороного, при помощи которого можно перечислить все типы параллелеоэдров Вороного, решает также вопрос и о перечислении типов всех параллелеоэдров вообще. Если же гипотеза Вороного неверна, то общая проблема описания всех параллелеоэдров остается открытой.

Этой гипотезе посвящена значительная часть мемуара Вороного. В частности, в нем Вороной доказал гипотезу для очень важного класса параллелеоэдров, так называемых примитивных.

Однако, несмотря на усилия многих математиков, проблема остается нерешенной на протяжении века для всех размерностей $d \geq 5$. Загадочное на первый взгляд упоминание в «Калейдоскопе «Кванта» о «не менее 110244» типах пятимерных параллелеоэдров означает, что, с одной стороны, найдены все 110244 типа пятимерных параллелеоэдров Вороного. А с другой стороны, всех типов может быть и больше, так как не известно, есть ли еще какие-либо пятимерные параллелеоэдры иного строения.

На пути решения проблемы Вороной предложил совершенно замечательную конструкцию – так называемый «подъем диаграммы Вороного на параболоид».

Пусть χ – дискретное множество точек на плоскости (x, y) и нам нужно построить «диаграмму Вороного», т.е. сетку из

областей Вороного относительно этих точек. Рассмотрим функцию $z(x, y) = x^2 + y^2$.

Ее графиком будет поверхность – параболоид вращения, который получается вращением параболы вокруг своей оси. «Поднимем» каждую точку X из $\mathcal{X}$ на параболоид. Проведем в каждой «поднятой» точке X' плоскость, касательную к параболоиду. Касательные плоскости вырезают многогранник, описанный около параболоида (рис.8). Вороной заметил, что если спроектировать этот многогранник на плоскость, то проекции граней совпадают с областями Вороного. Тем самым, задача построения диаграммы Вороного для данного множества сводится к построению выпуклого многогранника. Этот подход широко используется в совре-

Рис. 8

Рис. 9

- каждой области Вороного V_A соответствует вершина разбиения Делоне, которая является центром A этой области;
- ребру e диаграммы Вороного, разделяющему области V_A и V_B , соответствует ребро AB в разбиении Делоне;
- вершине v в диаграмме Вороного соответствует ячейка Делоне, вершины которой суть центры областей Вороного, сходящихся в v .

менной вычислительной геометрии и компьютерной графике.

Заметим, что диаграмма Вороного тесно связана с другой важной сеткой – разбиением Делоне (рис.9). Напомним, что разбиение Делоне плоскости также однозначно задается множеством $\mathcal{X}$ (см. статью «Многогранный Делоне» в «Кванте» №1, 2 за 2010 г.). Между диаграммой Вороного и разбиением Делоне имеется соответствие *дualности*:

Заклячая очерк об одном из самых крупных математиков, когда-либо работавших в теории чисел, подчеркнем, что глубокие идеи Георгия Феодосьевича Вороного не только оказывают влияние на современную теорию чисел, но и играют большую роль во многих науках и приложениях.

Рисунок Я.Кучериненко