Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Кожевников, Высоты треугольника и обратный ход, *Квант*, 2019, номер 1, 29–31

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20190103>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 06:24:28

Тогда длина изображения палочки будет

$$l' = f_2 - f_1 = \frac{lF^2}{(d - F)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2},$$

а искомое продольное увеличение будет

$$\Gamma_2 = \frac{l'}{l} = \frac{\left(\frac{d\Gamma_1}{1 + \Gamma_1}\right)^2}{\left(\frac{d}{1 + \Gamma_1}\right)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}.$$

А.Иванов

Высоты треугольника и обратный ход

П.Кожевников

Как известно, конструкция «остроугольный треугольник и его высоты» (рис.1)

Рис. 1

обладает многими замечательными свойствами. Вспомним некоторые из них. Итак, пусть в остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 и H – точка их пересечения.¹ Тогда выполнены следующие свойства.

(1a) Точки B, C, B_1, C_1 лежат на одной окружности.

Аналогичные свойства, конечно, верны для четверок точек C, A, C_1, A_1 и $A, B, A_1,$

¹ В этой же конструкции A – точка пересечения высот тупоугольного треугольника BCH , т.е. можно сказать, что здесь A, B, C, H – ортоцентрическая четверка «равноправных» точек.

B_1 . Назовем эти свойства (1b) и (1c) соответственно.

(2a) Точки A, H, B_1, C_1 лежат на одной окружности.²

Аналогично, утверждения о четверках B, H, C_1, A_1 и C, H, A_1, B_1 назовем (2b) и (2c).

Упражнение 1. Докажите перечисленные свойства для конструкции «остроугольный треугольник и его высоты».

А теперь «развернем» постановку задачи. Представим себе, что заранее неизвестно, что AA_1, BB_1, CC_1 – высоты. Таким образом, дано лишь то, что ABC – остроугольный треугольник, в котором на сторонах BC, CA, AB взяты соответственно точки A_1, B_1, C_1 так, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке H . Интересно установить связи между перечисленными свойствами, а также понять, какие из этих условий достаточно наложить, чтобы точно можно было утверждать, что AA_1, BB_1 и CC_1 – высоты.

Упражнения

2. Переформулируйте свойства (1a) ((1b), (1c)), (2a) ((2b), (2c)) в терминах различных равенств углов. Например, докажите, что

$$(1a) \Leftrightarrow \angle BB_1C = \angle BC_1C,$$

$$(2a) \Leftrightarrow \angle BC_1C = \angle AB_1H.$$

3. Докажите, что условие (2a) эквивалентно следующему: точка, симметричная точке H относительно прямой BC , лежит на описанной окружности треугольника ABC .

4. Переформулируйте свойства (1a), (2a) в терминах равенств произведений длин отрезков секущих. Например докажите, что

$$(1a) \Leftrightarrow HB \cdot HB_1 = HC \cdot HC_1,$$

$$(2a) \Leftrightarrow CA \cdot CB_1 = CC_1 \cdot CH.$$

² Окружности (AHB_1C_1) и (BCH_1A_1) «равноправны» с точки зрения ортоцентрической четверки точек A, B, C, H .

Утверждение. *Выполнение любых двух из шести свойств (1a), (1b), (1c), (2a), (2b), (2c) будет гарантировать, что AA_1 , BB_1 , CC_1 – высоты. (В частности, выполнение любых двух из шести указанных свойств влечет выполнение оставшихся четырех.)*

Доказательство. Доказать утверждение можно разными способами, мы предложим один из них, а читатель может придумать свой путь.

Рассмотрим пару данных свойств. С точностью до переобозначения точек A, B, C имеются следующие 4 принципиально различных случая.³ А именно,

- 1 случай: выполнены (1b) и (1c),
- 2 случай: выполнены (2b) и (2c),
- 3 случай: выполнены (2b) и (1c),
- 4 случай: выполнены (1a) и (2a).

Разберем сперва 4 случай (рис.2). Из условия (1a) следует, что $\angle BB_1C = \angle BC_1C$, откуда $\angle AB_1H = \angle AC_1H$. Но из условия (2a) вытекает, что $\angle AB_1H + \angle AC_1H = 180^\circ$, откуда $\angle AB_1H = \angle AC_1H = 90^\circ$, т.е. BB_1 и CC_1 – высоты.

Рис. 2

³ С точки зрения симметрии обозначений ортоцентрической четверки случаи 1, 2 и 3 аналогичны. В каждом из этих случаев фактически дано, что A_1 – точка Микеля для четверки прямых AB, AC, HB, HC .

Поскольку высоты пересекаются в одной точке, AA_1 – тоже высота.

Сведем каждый из случаев 1, 2, 3 к случаю 4.

Рассмотрим 1 случай (рис.3). Из условий (1b) и (1c) следует, что

Рис. 3

$\angle A_1C_1C = \angle A_1AC = \angle A_1AB_1 = \angle A_1BB_1$. Полученное равенство $\angle A_1C_1H = \angle A_1BH$ означает, что точки B, A_1, H, C_1 лежат на одной окружности, т.е. выполнено условие (2b). Теперь мы имеем пару условий (1b) и (2b), т.е. случай, аналогичный случаю 4.

Рассмотрим 2 случай (рис.4). Из условий (2b) и (2c) следует, что $\angle A_1B_1C = \angle A_1HC = \angle A_1BC_1$. Полученное равенство

Рис. 4

$\angle A_1B_1C = \angle A_1BA$ означает, что выполнено условие (1c). Теперь мы имеем пару условий (1c) и (2c), т.е. случай, аналогичный случаю 4.

Рассмотрим 3 случай (рис.5). Из условий (2b) и (1c) следует, что $\angle A_1B_1C =$

Рис. 5

$= \angle A_1BA = \angle A_1HC$. Полученное равенство $\angle A_1B_1C = \angle A_1HC$ означает, что выполнено условие (2с). Теперь мы имеем пару условий (1с) и (2с), т.е. случай, аналогичный случаю 4.

Наше утверждение доказано.

Упражнения

5. а) Выведите (2а) непосредственно из (2б) и (2с).

б) Тройка условий (2а), (2б), (2с) означает, что $\angle AB_1B = \angle BC_1C = \angle CA_1A = \varphi$. Выведите непосредственно из этих равенств, что AA_1 , BB_1 , CC_1 – высоты.

Указание. Предположим противное, скажем $\varphi < 90^\circ$. Проведя высоты, докажите, что AA_1 , BB_1 , CC_1 не могут пересекаться в одной точке.

6. Выведите из условий (1б) и (1с) условие (1а) (а также из (2б) и (2с) условие (1а)), используя упражнение 4.

Далее рассмотрим соотношение

$$(3a) \quad AB \cdot CC_1 = CA \cdot BB_1$$

(и аналогичные соотношения (3б) и (3с)).

Оно выполнено, если CC_1 и BB_1 – высоты, поскольку каждое из двух произведений равно удвоенной площади треугольника. Далее, если C_1 – произвольная точка на прямой AB , то удвоенная площадь треугольника ABC равна $2S = AB \cdot CC_1 \cdot \sin \angle CC_1B$. Аналогично, $2S = CA \cdot BB_1 \cdot \sin \angle BB_1C$. Таким образом, условие (3а) эквивалентно равенству $\sin \angle CC_1B = \sin \angle BB_1C$. Это равенство синусов, в свою очередь, означает, что либо углы CC_1B и BB_1C равны, либо они в сумме составляют 180° . Условие

$\angle CC_1B = \angle BB_1C$ эквивалентно тому, что точки C, B, C_1, B_1 лежат на одной окружности, т.е. условию (1а). Условие же

$$\angle CC_1B + \angle BB_1C = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \angle AC_1H + \angle AB_1H = 180^\circ$$

эквивалентно условию (2а).

После проведенной работы мы готовы получить короткое решение задачи М2530.

Задача М2530. В остроугольном треугольнике на сторонах BC , CA , AB взяты точки A_1 , B_1 , C_1 соответственно так, что отрезки AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке. Известно, что $BC \cdot AA_1 = CA \cdot BB_1 = AB \cdot CC_1$. Докажите, что AA_1 , BB_1 , CC_1 – это высоты треугольника.

Решение. По условию задачи нам даны равенства $BC \cdot AA_1 = CA \cdot BB_1$ и $BC \cdot AA_1 = AB \cdot CC_1$, т.е. условия (3с) и (3б). Из (3с) следует (1с) или (2с); аналогично, из (3б) следует (1б) или (2б). Итого, выполнены два из условий (1б), (2б), (1с), (2с). Остается воспользоваться доказанным утверждением.

В заключение отметим, что в конструкции «остроугольный треугольник и его высоты» (а ведь есть много других не менее интересных сюжетов!) можно рассмотреть другие свойства и вновь ставить «обратную задачу»: выяснять, следует ли из этих свойств, что AA_1 , BB_1 , CC_1 – высоты. В некоторых случаях такой «обратный ход» приводит к содержательным задачам.

Упражнение 7. В остроугольном треугольнике ABC на сторонах BC , CA , AB взяты точки A_1 , B_1 , C_1 соответственно так, что отрезки AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке. Определим условия:

(4а) $\angle BA_1C_1 = \angle CA_1B_1$, иначе говоря, BC – внешняя биссектриса угла $B_1A_1C_1$;

(5а) $\angle AA_1C_1 = \angle AA_1B_1$, т.е. A_1A – биссектриса угла $B_1A_1C_1$.

(Аналогично формулируются условия (4б) и (4с), (5б) и (5с).)

а) Докажите, что если выполнены условия (4а), (4б), (4с), то AA_1 , BB_1 , CC_1 – это высоты треугольника.

б) (Турнир городов, 2006 г.) Докажите, что если выполнены условия (5а), (5б), (5с), то AA_1 , BB_1 , CC_1 – это высоты треугольника.