Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Стасенко, Господин Великий Косинус, *Квант*, 2019, номер 1, 39–41

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20190105>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 18:12:08

Господин Великий Косинус

А. СТАСЕНКО

Что значит, в сущности, «думать»? Когда ... в воображении всплывают картины-воспоминания, то это еще не значит «думать». Когда эти картины становятся в ряд, каждый член которого пробуждает следующий, то и это еще не есть мышление. Но когда определенная картина встречается во многих таких рядах, то она, в силу своего повторения, начинает служить упорядочивающим элементом.

А.Эйнштейн. Физика и реальность

КАК-ТО ОДИН ДОГАДЛИВЫЙ УЧЕНИК, торопясь на занятия, заметил, что автомобили у бордюра проезжей части стоят под углом α по отношению к пешеходному переходу (рис.1). «Э, брат, – сообразил

Рис. 1. Автомобили у обочины ставят так, чтобы «косинус альфа» помог проезжать другим

школьник, – это не случайно: проекция продольного габарита автомобиля на пешеходный переход содержит $\cos \alpha$, что при $\alpha > 0$ позволяет сделать проезжую часть шире (чем при $\alpha = 0$). И тут он вспомнил, где еще встречал Косинус.

Например, что абсолютно упругий шарик массой m , двигавшийся со скоростью v , отскочив от стенки, сообщает ей импульс

$p = 2mv \cos \alpha$ (рис.2,а). Или – что работа силы F на перемещении l равна $A = Fl \cos \alpha$ (рис.2,б), откуда ясно, что при $\alpha = 90^\circ$ сила не совершает работы.

А если в электрическом контуре между напряжением U на нагрузке и током I есть сдвиг по фазе α (из-за индуктивности и/или емкости), то на нагрузке выделяется мощность $W = UI \cos \alpha$ (рис.2,в).

Рис. 2. Еще о «косинусе альфа». а) Импульс, полученный стенкой при абсолютно упругом ударе шарика, уменьшается с ростом угла α (с уменьшением $\cos \alpha$). б) Работа силы на перемещении тем больше, чем больше $\cos \alpha$. в) Фазовая диаграмма электрического контура: β , γ – фазы напряжения и тока на нагрузке, α – сдвиг фаз между ними

А когда Догадливый Ученик едет а трам- вае со скоростью v (система координат K_1), а Хулиган на улице (система K_0) светит фонариком под углом α относительно рельсов, то первый из них воспримет свет с частотой

$$v_1 = v_0 \frac{1 - \frac{v \cos \alpha}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

где v_0 – частота света фонарика, c – скорость света.

Среди безработных сил числится и центростремительная сила, действующая, например, на легкий спутник, вращающийся вокруг планеты по окружности, и равная силе притяжения. «Но, подумал Догадливый Ученик, – планеты вокруг Солнца вращаются не обязательно по окружностям». Ведь еще великий Кеплер (1571–1630) установил, что их орбиты – эллипсы, которые относятся к так называемым коническим

Рис. 3. О конических сечениях. а) Конус, рассеянный плоскостью RR , перпендикулярной его оси, дает окружность радиусом R . Сечение конуса наклонной к его оси плоскостью AP дает эллипс. б) Уравнение окружности – фактически теорема Пифагора для треугольника со сторонами x , y , R ; F – сила тяготения (она же центростремительная), действующая на спутник массой m со стороны гравитирующей массы M . в) Эллипс, в фокусе f которого находится центр гравитации массой M

сечениям (рис.3,а). Свойства эллипса были известны еще в древности, но прошло пятнадцать столетий, прежде чем человечество отказалось от бесполезных попыток использовать для описания движения планет нагромождения эпициклов Птолемея (II в.).

Все знают, что уравнение окружности радиусом R в декартовых координатах выглядит совсем просто:

$$x^2 + y^2 = R^2, \text{ или } \left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 = 1.$$

Фактически это теорема Пифагора: сумма квадратов катетов x и y равна квадрату гипотенузы R (рис.3,б).

В отличие от окружности, у эллипса уже два характерных размера – большая и малая полуоси a и b (рис.3,в). Поэтому в декартовых координатах уравнение эллипса отличается от уравнения окружности:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Есть и физическое отличие: модуль импульса планеты mv на круговой орбите – постоянная величина, так же, как и момент импульса mvR ; а на эллиптической орбите сохраняется только момент импульса, что составляет суть второго закона Кеплера. Конечно, в те времена таких слов в физике не было, поэтому закон был сформулирован как сохранение площади, заметаемой радиусом-вектором планеты в равные промежутки времени.

Начало декартовой системы координат расположено в центре эллипса ($x = 0$, $y = 0$). Но физически важным является его фокус ($x = f$, $y = 0$), в котором расположено массивное гравитирующее тело массой M , например Солнце, вокруг которого и вращаются легкие планеты. Поэтому лучше перейти к другой системе координат, так называемой полярной, в которой положение точечной массы m определяется ее расстоянием r от гравитирующего тела и углом α , отсчитываемым от оси x . Теперь уравнение орбиты планеты запишется в виде

$$r = \frac{b^2}{a(1 + e \cos \alpha)}.$$

Здесь $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ – эксцентриситет

эллипса. Очевидно, что в случае окружности $a = b = R$, $c = 0$, $e = 0$, так что $r = R$. Точка P ($\alpha = 0$, $r = a - c$), ближайшая к центру гравитации, называется перигелием (*пери* – близко, вспомним перископ; *гелий* – солнце), а наиболее удаленная точка A ($\alpha = \pi$, $r = a + c$) называется афелием. (Поскольку r изменяется во времени, сила тяготения перестает быть безработной.)

Тут уместно вспомнить, что для спутников Земли, в том числе для Луны, используется термин *перигей* (Гея – Земля), а для верши-

ны чего-либо достигнутого – *апогей* (например, апогей славы).

Но что мы видим в знаменателе уравнения орбиты планеты, записанного в полярной системе координат? Наш знакомый косинус!

И это еще не все. Почему на экваторе жарко, а на полюсах Земли холодно? Выделим две малые одинаковые площадки у экватора ($\alpha = 0$) и в более высоких широтах

Рис. 4. На одинаковые площадки на поверхности сферы приходятся неодинаковые, в зависимости от $\cos \alpha$, потоки энергии

($\alpha > 0$). Из рисунка 4 видно, что на них попадают разные потоки энергии от светила. И опять-таки: все зависит от косинуса угла между вектором плотности потока энергии $\vec{q}$ ($\left[q = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} \right]$) и внутренней нормалью $\vec{n}$ к площадке.

А почему зима и лето сменяют друг друга? Ясно, что это связано с углом φ наклона оси Земли по отношению к нормали к плоскости орбиты (рис.5). В результате на выделенную нами площадку на широте α зимой в полдень придет плотность энергии $q_3 \cos(\alpha + \varphi)$, а летом – плотность энергии

Рис. 5. Вследствие наклона оси Земли к плоскости орбиты (угол φ) зимой (слева) и летом (справа) северное полушарие получает разные потоки энергии от Солнца, расположенного в фокусе f эллиптической орбиты Земли

$q_л \cos(\alpha - \varphi)$ (здесь з – зима, л – лето). Но ведь второй косинус больше первого!

Получается, что зимой у нас холодно из-за наклона оси. А если бы мы при этом были максимально удалены от Солнца, то было бы еще немного холоднее. Но тут Природа слегка порадовала: в это время мы ближе к светилу. И это справедливо: в нашем полушарии и площадь суши и население больше.

Найдем отношение значений максимальной плотности потока энергии Солнца зимой и летом, например, на широте $\alpha = 57^\circ$. Учтем, что $\varphi = 23^\circ$, а эксцентриситет орбиты Земли $e = 0,017$. Отношение плотностей потоков энергии в перигелии и афелии обратно пропорционально квадрату расстояний от источника света:

$$\left(\frac{a+c}{a-c} \right)^2 = \left(\frac{1+c/a}{1-c/a} \right)^2 = \left(\frac{1+e}{1-e} \right)^2 = 1,07,$$

а отношение косинусов равно

$$\frac{\cos \alpha_P}{\cos \alpha_A} = \frac{\cos(57^\circ + 23^\circ)}{\cos(57^\circ - 23^\circ)} = \frac{0,174}{0,83} = 0,21.$$

В результате получим

$$\frac{q_P}{q_A} = 0,21 \cdot 1,07 = 0,224.$$

Кстати, Кеплер в 1604 году сформулировал и закон обратной пропорциональной зависимости между освещенностью и квадратом расстояния до источника света, который мы только что использовали.

Итак, слава Великому Косинусу! Ибо от него зависит, в частности, кого мы встретим, выйдя из палатки, – белого медведя среди ледяных торосов или попугая на пальме.

Конечно, теория эллиптических орбит не совсем точна: и масса Солнца не бесконечно велика, и планеты влияют друг на друга. Но чтобы во всем этом разобраться, надо поступить в МГУ или на ФИЗТЕХ, чего вам и желаем.