Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Эвнин, Задачи о фокусниках и теоремы Холла и Шпернера,
Квант, 2019, номер 2, 14–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20190202>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает,
что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 12:39:26

Задачи о фокусниках и теоремы Холла и Шпернера

А.ЭВНИН

Теорема Холла

В популярной математической литературе широкую известность получила следующая задача.

Задача о свадьбах. *Имеется множество юношей, каждый из которых знаком с некоторыми девушками. При каких условиях можно одновременно поженить всех юношей так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке?*

Ответ таков: задача разрешима тогда и только тогда, когда любые k юношей из данного множества знакомы в совокупности не менее чем с k девушками.

Заметим, что необходимость здесь очевидна. Действительно, если для каких-то k юношей число потенциальных невест меньше k , то уже этих k юношей одновременно поженить не удастся. Достаточность доказывается не так просто!

Для того чтобы сформулировать задачу о свадьбах на математическом языке, приведем некоторые определения из теории графов [1].

Вершины графа – смежные, если они соединяются ребром. Ребра графа называются смежными, если у них есть общая вершина, и несмежными в противном случае. Попарно несмежные ребра графа образуют *паросочетание*. Например, в графе на рисунке 1 можно указать несколько паросочетаний из четырех ребер. Одно из них $\{aa_1, bb_1, cc_1, dd_1\}$.

Пусть $G(V_1, V_2)$ – двудольный граф с долями V_1 и V_2 (в этом графе любое ребро соединяет некоторую вершину из V_1 с некоторой вершиной из V_2). *Совершенным паросочетанием* из V_1 в V_2 называется паросочетание в этом графе, покрываю-

Рис. 1

щее V_1 (т.е. для всякой вершины из V_1 в паросочетании найдется выходящее из нее ребро). Например, на рисунке 2 изображен граф с долями $V_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$ и

Рис. 2

$V_2 = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$. Ребра x_1y_1 , x_2y_2 и x_3y_3 образуют совершенное паросочетание из V_1 в V_2 .

Пусть G – граф с множеством вершин V , а A – подмножество V . *Окружением* множества A называют множество

$$\Gamma(A) = \bigcup_{v \in A} \Gamma(v),$$

где $\Gamma(v)$ – множество вершин, смежных с v .

Напомним также, что *мощность* конечного множества — это число его элементов.

Теперь решение задачи о свадьбах может быть сформулировано следующим образом.

Теорема 1 (Ф.Холл, 1935 г.). *Совершенное паросочетание из V_1 в V_2 в двудольном графе $G(V_1, V_2)$ существует тогда и только тогда, когда для любого множества $A \subset V_1$ мощность его окружения не меньше мощности A , т.е. $|\Gamma(A)| \geq |A|$.*

Четыре разных способа доказательства теоремы Холла можно найти в книге [2].

Достаточное условие

В данной статье речь пойдет об одном (простом, но малоизвестном) достаточном условии существования совершенного паросочетания в двудольном графе.

Теорема 2. *Пусть в непустом (т.е. имеющем хотя бы одно ребро) двудольном графе $G(V_1, V_2)$ степень любой вершины из доли V_1 не меньше степени любой вершины из доли V_2 . Тогда в этом графе существует совершенное паросочетание из V_1 в V_2 .*

Доказательство. Пусть q — число, которое не больше степени любой вершины из V_1 и не меньше степени любой вершины из V_2 . Возьмем произвольные k вершин первой доли $b_1, b_2, \dots, b_k$ и смежные с ними вершины $g_1, g_2, \dots, g_l$ второй доли. Рассмотрим порожденный этими $k + l$ вершинами подграф G' исходного графа (в G' входят указанные вершины и все ребра между ними, имеющиеся в исходном графе). Ясно, что в графе G' степень любой вершины из первой доли не меньше q , а из второй не больше q . Число ребер двудольного графа равно сумме степеней вершин любой из его долей. Поэтому

$$kq \leq \sum_{i=1}^k \deg(b_i) = \sum_{j=1}^l \deg(g_j) \leq lq,$$

откуда $k \leq l$. Таким образом, выполнены условия теоремы Холла о существовании совершенного паросочетания в двудольном графе.

Граф называется *регулярным*, если степени всех его вершин равны между собой. Назовем двудольный граф *полурегулярным*, если в каждой доле степени всех ее вершин равны между собой. Извлечем из теоремы 2 следующие следствия.

Следствие 1. *В любом непустом регулярном двудольном графе существует совершенное паросочетание.*

Следствие 2. *В непустом полурегулярном двудольном графе $G(V_1, V_2)$ совершенное паросочетание существует тогда и только тогда, когда в доле V_1 вершин не больше, чем в V_2 .*

Доказательство. *Необходимость* очевидна.

Достаточность. Пусть в V_1 и V_2 степени вершин равны a и b соответственно. Подсчитав двумя способами количество ребер в двудольном графе, получим $a|V_1| = b|V_2|$. Учитывая неравенство $|V_1| \leq |V_2|$, отсюда получаем, что $a \geq b$. Осталось воспользоваться теоремой 2.

Задачи о фокусниках

Имеется ряд задач, которые легко решаются с помощью теоремы 2 и следствий из нее. Фабула этих задач такова. Зрители предъявляют ассистенту фокусника некоторый случайным образом выбранный объект (например, несколько игровых карт), после чего ассистент по своему выбору как-то изменяет этот объект. Далее фокусник по новому объекту восстанавливает исходный.

Построим двудольный граф $G(V_1, V_2)$ следующим образом. Пусть вершины из V_1 — это всевозможные конфигурации, которые зрители могут предъявить ассистенту фокусника, а вершины из V_2 — те конфигурации, которые может получить ассистент. Если из конфигурации $a \in V_1$ может быть получена конфигурация $b \in V_2$, то в графе должно быть ребро ab ; других ребер в графе нет.

Если в данном графе существует совершенное паросочетание из V_1 в V_2 , то фокусник с ассистентом, используя его, смогут осуществить фокус: фокусник по конфигурации b однозначно определит конфигурацию a .

Рассмотрим конкретные задачи.

Для решения некоторых из них нужно знать формулы для числа сочетаний $C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$ (это количество способов выбрать k элементов из n имеющихся, если порядок выбора не важен) и для числа размещений $A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$ (это количество способов выбрать k элементов из n имеющихся, если порядок выбора важен).

Задача 1. *Имеются 27 карточек с числами от 1 до 27. Двое показывают следующий фокус. Первый получает четыре карточки, выбранные случайным образом. Одну из них он убирает, а три оставшиеся выкладывает в ряд. Второй должен назвать спрятанную карточку. Могут ли участники договориться так, чтобы по выложенным карточкам можно было определить спрятанную?*

Ответ: да, могут.

Решение. Рассмотрим двудольный граф, в одной доле которого сочетания из 27 по 4, в другой размещения из 27 по 3 и ребро соединяет размещение с сочетанием, если все элементы размещения входят в сочетание.

Очевидно, граф полурегулярный (на самом деле, даже регулярный). Поскольку $C_{27}^4 = A_{27}^3 = 27 \cdot 26 \cdot 25$, к графу можно применить следствие 2. В рассматриваемом двудольном графе существует совершенное паросочетание. Фокусникам осталось договориться о том, какое совершенное паросочетание им использовать.

Задача 2. *Фокусник и его помощник показывают следующий фокус. Фокусник выкладывает колоду из 36 карт и просит двух зрителей – мальчика и девочку – выбрать по две карты. Видя, кто какие карты выбрал, помощник тоже берет две карты из оставшихся и отдает их зрителям. Зрители перемешивают все 6 карт и отдают их фокуснику. Тот объявляет, кто какие карты брал из колоды. Докажите, что такой фокус действительно возможен.*

Решение. Здесь в первой доле графа – упорядоченные пары неупорядоченных пар. Например, вершина $(\{1, 2\}, \{3, 4\})$ со-

ответствует случаю, когда мальчик выбрал карты с номерами 1 и 2 (можно считать, что карты пронумерованы числами от 1 до 36), а девочка – карты с номерами 3 и 4. Во второй доле графа – неупорядоченные шестерки карт. Ребро проводится в случае, когда шестерка получается из четверки добавлением двух карт. В первой доле построенного двудольного полурегулярного графа $C_{36}^2 \cdot C_{34}^2$ вершин, а во второй C_{36}^6 . Очевидно, $|V_1| < |V_2|$. Выполнены условия следствия 2, гарантирующего существование совершенного паросочетания – фокус возможен.

Задача 3. *Зритель пишет на доске слева направо 10 цифр. Помощник фокусника закрывает одну из цифр карточкой. После этого входит фокусник и называет закрытую цифру. Докажите, что такой фокус действительно возможен.*

Решение. Пусть V_1 и V_2 – множества тех «картинок», которые могут увидеть помощник и фокусник соответственно. Рассмотрим двудольный граф $G(V_1, V_2)$, ребра которого описывают возможные переходы от картинок из V_1 к картинкам из V_2 . Требуется доказать, что в этом графе существует совершенное паросочетание.

Если $u \in V_1$, то $\deg(u) = 10$, поскольку помощник может закрыть любую из 10 записанных зрителем цифр. Если $v \in V_2$, то $\deg(v) = 10$, поскольку карточка может закрывать любую из цифр от 0 до 9. Согласно следствию 1, в $G(V_1, V_2)$ существует совершенное паросочетание.

Заметим, что в графе довольно много вершин – по 10^{10} в каждой доле. Покажем, что фокус осуществим не только теоретически, но и практически.

Пусть места, где записаны цифры, пронумерованы слева направо: 1, 2, ..., 9, 0. Помощник подсчитывает сумму S всех записанных зрителем цифр и закрывает карточкой место, номер которого является последней цифрой числа S . Фокусник вычисляет сумму девяти открытых цифр и, (по положению карточки) зная последнюю цифру суммы десяти цифр, легко определяет закрытую цифру.

Задача 4. Зритель пишет на доске слева направо n цифр. Помощник фокусника закрывает одну из цифр красной карточкой, другую синей, еще одну зеленой. После этого входит фокусник и называет закрытые цифры. При каком наименьшем n такой фокус возможен?

Ответ: при $n = 12$.

Решение. Пусть V_1 и V_2 – множества тех «картинок», которые могут увидеть помощник и фокусник соответственно. Рассмотрим двудольный граф $G(V_1, V_2)$, ребра которого описывают возможные переходы от картинок из V_1 к картинкам из V_2 . Граф полурегулярный, $|V_1| = 10^n$, $|V_2| = n(n-1)(n-2) \cdot 10^{n-3}$. По следствию 2, для существования совершенного паросочетания из V_1 в V_2 необходимо и достаточно, чтобы в доле V_2 вершин было не меньше, чем в V_1 . Отсюда $n(n-1)(n-2) \geq 10^3$, что равносильно неравенству $n \geq 12$. Таким образом, наименьшее значение n равно 12.

Покажем, как фокус осуществить практически при $n \geq 12$. Места, где записаны первые 12 цифр, пронумеруем слева направо: 1, 2, ..., 9, 0, 11, 12 (остальные места, если они есть, не нумеруем!). Пусть S – сумма всех записанных зрителем цифр. Будем действовать за помощника следующим образом. Закроем красной карточкой место, номер которого является последней цифрой числа S , после чего мысленно удалим это место, а синей карточкой закроем место с номером, равным цифре, которая спрятана под красной карточкой. Затем зеленой карточкой закроем место, номер которого (вычисленный после «удаления» цифр, находящихся под красной и синей карточками) спрятан под синей карточкой.

Теперь фокусник по положению зеленой карточки поймет, какая цифра под синей, а по положению синей карточки – какая цифра под красной. Все цифры, кроме той, которая под зеленой карточкой, уже известны фокуснику, а положение красной карточки говорит о последней цифре суммы всех цифр, записанных зрителем. Поэтому фокусник сможет определить цифру и под зеленой карточкой.

Задачи для самостоятельного решения

Приведем подборку задач¹, при решении которых возможно применение теоремы Холла. Некоторые задачи совсем простые (решаются простой ссылкой, например, на следствие 1; нужно лишь увидеть соответствующий двудольный граф!), некоторые предлагались на школьных и студенческих олимпиадах различного уровня. Задачи 11–15 посвящены доказательству и применениям теоремы Шпернера.

1. Имеется бесконечное множество юношей и бесконечное множество девушек. Для любого натурального числа k верно, что любые k юношей знакомы в совокупности не менее чем с k девушками. Верно ли, что всех юношей удастся одновременно поженить на знакомых им девушках? Другими словами, справедлива ли теорема Холла в случае бесконечного графа?

2. Решите задачу 1 в предположении счетности² множеств юношей и девушек.

3. В некотором районе, состоящем из нескольких деревень, число женихов равно числу невест. В каждой деревне общее число женихов и невест не больше половины общего их числа. Докажите, что можно всех переженить так, чтобы в каждой паре жених и невеста были из разных деревень.

4. Однокруговой волейбольный турнир $2n$ команд продолжался $2n - 1$ дней. Каждый день проходило n игр, каждая команда в один день проводила ровно одну игру. По окончании турнира организаторы решили наградить тортами некоторые команды: за каждый игровой

¹ Задача 3 предлагалась на III этапе Российской олимпиады школьников 1995 года, задача 4 – на Putnam Competition 2012 года, задача 14 – на Московской олимпиаде 2017 года, задача 15 – на Открытой олимпиаде ФМЛ 239 в 2004 году. Остальные задачи взяты из сборников [3, 4].

² Множество называется счетным, если существует взаимно однозначное соответствие между ним и множеством натуральных чисел (другими словами, элементы данного бесконечного множества можно пронумеровать натуральными числами). Счетными являются множества натуральных чисел, неотрицательных целых чисел, целых чисел, рациональных чисел.

день торт вручается какой-то команде, победившей в этот день. Всегда ли организаторы смогут осуществить свой выбор таким образом, чтобы только одна команда осталась без торта?

5. На танцевальном вечере каждый юноша знаком с k девушками, а каждая девушка знакома с k юношами. Докажите, что можно провести k (медленных) танцев так, чтобы каждый участник вечера станцевал со всеми своими знакомыми (противоположного пола).

6. На шахматной доске пометили 16 из 64 клеток так, что на каждой вертикали и каждой горизонтали оказалось по две помеченные клетки. Докажите, что на помеченных клетках можно расставить 8 черных и 8 белых фигур так, чтобы на каждой вертикали и каждой горизонтали стояло по одной белой и одной черной фигуре.

7. Карточная колода из 36 карт раздается на 9 человек по 4 карты каждому. Докажите, чтобы каждый может выложить по одной карте так, что все эти карты были разного достоинства.

8. Выполняя домашнее задание, каждый студент группы решил по 4 задачи. Известно, что каждая задача была решена четырьмя студентами. Докажите, что можно организовать разбор задач так, чтобы каждый студент рассказал решение ровно одной задачи и чтобы все задачи были разобраны (по одному разу).

9. Пусть $G(V_1, V_2)$ – двудольный граф; для любого подмножества A доли V_1 выполняется неравенство $|\Gamma(A)| \geq |A| - d$. Докажите, что максимальная мощность паросочетания в графе G не меньше $|V_1| - d$.

Для дальнейшего нам понадобятся следующие термины. Пусть имеется некоторый набор различных множеств. Говорят, что они образуют *цепь*, если для любых двух из них одно является подмножеством другого, и *антицепь*, если для любых двух из них ни одно не является подмножеством другого. Например, множества $\{1\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 3, 4\}$ образуют цепь, а множества $\{1\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$ образуют антицепь. Будем считать, что если у нас всего одно множество, то оно одновременно и цепь, и антицепь. Очевидно, что цепь и антицепь не могут пересекаться более чем по одному множеству. Булеан множества – это множество всех его подмножеств.

10. Докажите, что существует разбиение булеана n -элементного множества на цепи, каждая из которых содержит множество мощности $\lfloor n/2 \rfloor$.

11. Докажите **теорему Шпернера**: максимальная длина антицепи в булеане n -элементного множества равна $C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

12. Среди 250 сотрудников международной фирмы в любой паре сотрудников каждый знает язык, который не знает другой сотрудник из этой пары. Какое наименьшее возможное число языков знают (в совокупности) сотрудники фирмы?

13. В деревне живут 250 хоббитов. Каждый хоббит живет в отдельном домике. По вечерам они ходят друг к другу в гости. За один вечер каждый хоббит посещает всех, кого можно застать дома, причем если он идет в гости, то у себя дома в этот вечер уже не появляется. За какое наименьшее число вечеров может случиться так, что каждый житель деревни побывает в гостях у всех остальных?

14. Детектив Ниро Вульф расследует преступление. В деле замешаны 80 человек, среди которых один – преступник, еще один – свидетель преступления (но неизвестно, кто это). Каждый день детектив может пригласить к себе одного или нескольких из этих 80 человек, и если среди приглашенных есть свидетель, но нет преступника, то свидетель сообщит, кто преступник. Может ли детектив заведомо раскрыть дело за 12 дней?

15. Пусть G – граф с множеством вершин V . Известно, что для любого множества $A \subset V$ мощность его окружения не меньше мощности A . Докажите, что в графе G найдется паросочетание, в котором не меньше $|V|/3$ ребер.

Литература

1. М.Л.Краснов. Вся высшая математика: учебник. Т.7/М.Л.Краснов, А.И.Киселев, Г.И.Макаренко, Е.В.Шикин, В.И.Заляпин, А.Ю.Эвнин. – М.: URSS, 2017.
2. А.Ю.Эвнин. Вокруг теоремы Холла. – М.: URSS, 2019.
3. А.Ю.Эвнин. Задачник по дискретной математике. 6-е изд. – М.: URSS, 2016.
4. Всероссийские студенческие турниры математических боев. Тула, 2002–2015 г. Ч. II. – Тула: Изд-во ТПУ им. Л.Н.Толстого, 2017.

Первоначальный вариант статьи опубликован в журнале «Математика в школе» (2019, №2).